OTTICA E FLUIDODINAMICA

- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = -\vec{\nabla}^2\vec{v} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$
- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}^2 f = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
- $\vec{\nabla}(f\cdot\vec{v}) = \vec{\nabla}f\cdot\vec{v} + f\vec{\nabla}\vec{v}$
- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$
- $\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\vec{\nabla})\vec{B}$
- $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^2) = \vec{v}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$

$\vec{\nabla}\wedge(f\cdot\vec{v}) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{v} + f\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) + \vec{B}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$

Cartesiane

$\nabla^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$

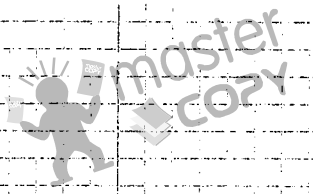
$= \frac{1}{r}\partial r + \partial r^2 + \frac{1}{r^2}\partial\theta^2$ polari

Cilindriche

$\frac{1}{r}\partial r + \partial r^2 + \frac{1}{r^2}\partial\theta^2 + \partial z^2$

$\frac{1}{r}\partial_r^2(rf) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial\theta\cdot f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial\phi^2 f$





DEFINIZIONI

(Concetti base di Fluidodinamica)

1) Elemento fluido trattato come particella materiale tc
$(\mathcal{V})^{\frac{1}{3}}_{molecole} \ll (\mathcal{V})^{\frac{1}{3}} \ll 1\,cm$

2) Possibilità di utilizzare • Eq. di stato
• Variabili termodinamiche macroscopiche

(Condizioni di mantenimento Identità elemento fluido materiale)

Se si ha identità Valgono per l'elemento fluido

• $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}(t), t)$ con $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$

• $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

DIFFUSIONE

La perdita di identità del fluido è dovuta all'uscita o entrata di molecole nel $d\mathcal{V}$ per diffusione

La Diffusione è caratterizzata da l_c libero cammino medio
τ_c tempo di collisione

tali che: $l_c = v_{th} \cdot \tau_c$ con n: densità particelle, σ: sezione d'urto, v_{th}: velocità termica

$n \sigma l_c = 1$

Osservazione (Condizione per diffusione limitata)

Fluido fermo:

$\partial_t g = K_D \nabla^2 g$ Legge di Flick $\Longrightarrow T \ll \frac{L^2}{K_D} = \tau_D$

• L lunghezza di scala in cui variano sensibilmente $\vec{v}, \rho, p$

• $\tau_d = \frac{L^2}{K_D}$ tempo per cui vale $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ sull'elemento fluido

ovvero $\boxed{\frac{L^2}{T} \gg K_D}$ T tempo di osservazione del fenomeno

Derivata totale e materiale

$\varphi(\vec{x}, t)$ campo scalare con velocità di deriva $\vec{u}(\vec{x}, t)$

$\frac{D\varphi}{Dt} = \partial_t \varphi + \vec{u} \vec{\nabla} \varphi$ derivata materiale di un campo scalare

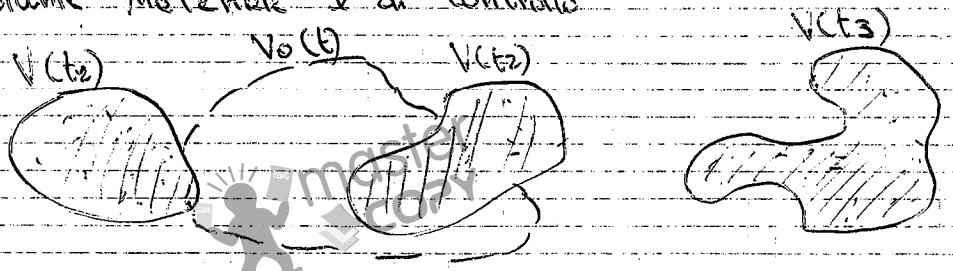
$\frac{D\vec{a}}{Dt} = \partial_t \vec{a} + \vec{u} \vec{\nabla} \vec{a}$ derivata materiale di un campo vettoriale

$\frac{d}{dt}(\varphi(\vec{x}, t)) = \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$ derivata totale di un campo scalare

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)^t$ descrive la velocità di un oggetto lungo un determinato cammino $\vec{x}(t)$

se $\boxed{\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}} \iff \boxed{\frac{D}{Dt}(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi)}$ condizione uguaglianza derivata totale e materiale

Volume Materiale e di Controllo



Volume materiale: Volume(t) mobile e deformabile composto $\forall t$ dalle stesse particelle

Volume di controllo: Volume(t) mobile e deformabile qualsiasi

Grandezze Estensive e Intensive

Intensive: Non dipende dalle dimensioni del V considerato	Estensive: dipende dal V considerato
$(p, T, \underline{\underline{\tau}}, \vec{v}, U_V)$	$(\rho, m, S, \vec{p}, E)$

Coniugazione

b grandezza intensive $\Rightarrow$ $B = \int_\rho g \cdot b \cdot d\rho$ grandezza estensiva coniugata

esempio $\underline{\underline{\tau}} \to m \quad \vec{v} \to \vec{p} \quad \frac{v^2}{2} \to E$

master COPY

Theorem del trasporto di Reynolds

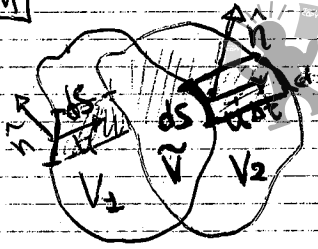
$\vec{f}(\vec{r},t)$ campo vettoriale o scalare, $V_{\partial V}$ Volume di controllo mobile con $\vec{v}_{\partial V}$

$$I^{\circ}\quad \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \vec{f}(\vec{r},t)\,d^3r = \int_{V(t)} \frac{\partial \vec{f}(\vec{r},t)}{\partial t}\,d^3r + \oint_{\partial V(t)} \vec{f}(\vec{r},t)\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\hat{n}(\vec{r},t)\,dS$$

in forma compatta:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \vec{f}\,dV = \int_{V(t)} \partial_t \vec{f}\,dV + \oint_{\partial V(t)} \vec{f}\cdot(\vec{v}_r\cdot d\vec{S})} \qquad \vec{v}_r = \vec{v}_{fluido} - \vec{v}_{\partial V}$$

Dim



a) In un certo istante $V_0 = V(t)$ volume materiale (volume di controllo)

$V_0 = V(t) = (\tilde{V} + V_1)(t) \quad \tilde{V} = V_0 \cap V(t+\Delta t)$

$V(t+\Delta t) = \tilde{V} + V_2(t+\Delta t)$ $\qquad V(t)\cap V(t+\Delta t)$

$\vec{B}$ grandezza estensiva

1) $$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \frac{\vec{B}}{dV}\,dV = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} \frac{\vec{B}}{dV}\,dV - \int_{V(t)} \frac{\vec{B}}{dV}\,dV}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \int_{V} \vec{b}(t+\Delta t)\,dV + \int_{V_2} \vec{b}(t+\Delta t)\,dV - \int_{V} \vec{b}(t)\,dV - \int_{V_1} \vec{b}(t)\,dV$$

2) $$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\int_V (\vec{b})(t+\Delta t)\,dV - \int_V (\vec{b})(t)\,dV}{\Delta t} = \int_{V(t)=V_0} \partial_t(\vec{b})\,dV$$

3) $dV_2 = \vec{u}\cdot\Delta t\cdot\hat{n}\,dS$ con $\vec{u}$ velocità del Volume di traslazione $\qquad dV_1 = -\vec{u}\,\hat{n}\,dS\,\Delta t$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\int_{V_2} (\vec{b})(t+\Delta t)\,dV - \int_{V_2} (\vec{b})(t)\,dV}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\int_{S_2} (\vec{b})(t+\Delta t)\,\vec{u}\,\hat{n}\,dS + \int_{S_1} (\vec{b})(t)\,\vec{u}\,\hat{n}\,dS\right]$$

$$= \int_{S_0} (\vec{b})(\vec{u}\,\hat{n}\,dS) \qquad \text{dato che } S_1 + S_2 \xrightarrow[t\to 0]{} S_0$$

4) $$\frac{d\vec{B}}{dt} = \int_{V_0} \partial_t(\vec{b})\,dV + \int_{\partial V_0} b\,\vec{u}\,\hat{n}\,dS$$

5) $\vec{b}\vec{u}$ continua e differenziabile $\Rightarrow$ $$\frac{d\vec{B}}{dt} = \int_{V_0} \partial_t(\vec{b})\,dV + \int_{V_0} \vec{\nabla}\cdot(b\vec{u})\,dV$$

master COPY

Fluidodinamica

Osservazione (Stato di moto di un fluido)

Lo stato di un fluido in movimento è determinabile da 5 quantità:

1) $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$ campo di velocità
2) 2 grandezze termodinamiche indipendenti:
   $p(\vec{x},t)$ e $\rho(\vec{x},t)$
   pressione densità
+) equazione di stato

Equazione di continuità (FORM. EULERIANA)

$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ densità di flusso di massa $\Longrightarrow$ $\boxed{\partial_t \rho + \rho \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \vec{v}\vec{\nabla}\rho = 0}$

$\rho(\vec{x},t)$ densità fluido

$\vec{v}(\vec{x},t)$ velocità Eulero fluido

$\Updownarrow$

$\boxed{\partial_t \rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0}$

DIM: la massa totale si conserva $\frac{dM}{dt} = 0$

1) Consideriamo V_0. La massa di fluido in V_0 è $\int_{V_0} \rho \cdot dV$
2) Nell'unità di tempo la massa di fluido uscente da V_0 è $d\vec{S} \cdot \vec{v} \cdot \rho$
   Dunque la massa totale di fluido uscente è $\int_{\partial V_0} \rho \cdot \vec{v}\, d\vec{S}$

   Scrivibile come la variazione di massa totale

$$\int_{\partial V_0} \rho \cdot \vec{v}\, d\vec{S} = -\partial_t \int_{V_0} \rho\, dV \quad \leftrightarrow \quad \int_{\partial V_0} \vec{j}\, d\vec{S} = -\partial_t \int_{V_0} \rho\, dV$$

2) Utilizzando th di Gauss

$$\int_{\partial V_0} \vec{j}\, d\vec{S} = \int_{V_0} \vec{\nabla}\vec{j}\, dS = -\partial_t \int_{V_0} \rho\, dV \quad , \forall V_0$$

A Vaume fisso V_0 nel tempo (non deformabile)

$$\int_{V_0} \vec{\nabla}\vec{j} + \partial_t \rho\, dV = 0 \quad \forall V_0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

Equazione di Eulero (Fluidi Ideali)

- Fluido ideale $\boxed{\frac{d}{dt} S = 0}$ moto adiabatico (Conduttività termica e viscosità trascurabili)
- $\vec{g}$ accel. esterne
- $\boxed{\frac{d}{dt}\rho = 0}$
- $\frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{x}_0,t) = \partial_t v(\vec{x},t) + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}$

$$\Longrightarrow \boxed{\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}}$$

Eq. Eulero

$$\boxed{\partial_t(\rho \cdot s) + \vec{\nabla}(\rho s \vec{v}) = 0}$$

Eq conservazione entropia