MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PISA 26/09/2017

INTRODUZIONE

A.1 DEFINIZIONE DI SISTEMA LINEARE

I SISTEMI LINEARI SONO UNA CLASSE PARTICOLARE, MA MOLTO IMPORTANTE, DI SISTEMI DINAMICI. SONO CARATTERIZZATI DA VARIABILI DI:
a) INGRESSO u,
b) STATO x,
c) USCITA y,

INDICHIAMO CON t IL TEMPO CHE PUÒ ESSERE:
- UN INTERO ⟶ SISTEMA A TEMPO DISCRETO;
- UN REALE ⟶ SISTEMA A TEMPO CONTINUO;

CI LIMITEREMO AL CASO CON UN SOLO INGRESSO E UNA SOLA USCITA, A DIMENSIONI FINITE:
$u(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}$ DOVE n È DETTO ORDINE DEL SISTEMA.

FATTE QUESTE PREMESSE, DEFINIAMO:
- SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO ⟶ SISTEMI IN CUI LO STATO SI AGGIORNA SECONDO UN'EQUAZIONE LINEARE, DETTA EQUAZIONE DI STATO

$$x(t+1) = Ax(t) + b \cdot u(t) \qquad (1)$$

CON A MATRICE $[n \times n]$ E b VETORE $[n \times 1]$. L'USCITA DIPENDE DALLO STATO $x(t)$ E DALL'INGRESSO $u(t)$ SECONDO UN'EQUAZIONE LINEARE DETTA TRASFORMAZIONE D'USCITA

$$y(t) = c^T \cdot x(t) + d \cdot u(t) \qquad (2)$$

DOVE c^T È UN VETORE $[n \times 1]$ E d UN REALE. SE SCRIVO LA (1) PER OGNI COMPONENTE x_i DEL VETORE DI STATO, OTTENGO

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\ x_2(t+1) &= a_{21} x_1(t) + \dots + a_{2n} x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\ &\vdots \\ x_n(t+1) &= a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n \cdot u(t) \end{aligned}$$

MENTRE LA (2) SARÀ:

$$y(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) + d \cdot u(t)$$

SUPPORREMO IN SEGUITO CHE A, b, c^T E d SIANO COSTANTI NEL TEMPO (SISTEMI INVARIANTI)

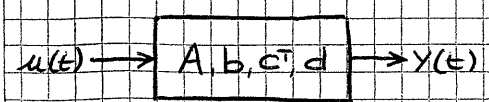
- SISTEMA LINEARE A TEMPO CONTINUO ⟶ SISTEMI CON EQUAZIONE DI STATO:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \qquad (3)$$

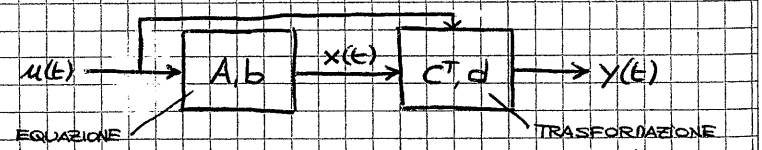
E TRASFORMAZIONE D'USCITA:

$$y(t) = c^T \cdot x(t) + d \cdot u(t) \qquad (4)$$

QUESTI DUE TIPI DI SISTEMI POSSO RAPPRESENTARLI IN 2 FORME:



- FORMA COMPATTA -



- FORMA DISACCOPPIATA -

LA PRIMA FORMA METTE IN EVIDENZA SOLO LE VARIABILI DI INGRESSO E USCITA, DETTE ESTERNE, PERCHÈ SONO QUELLE ATTRAVERSO CUI IL SISTEMA INTERAGISCE CON IL RESTO DEL MONDO.
LA SECONDA METTE IN EVIDENZA ANCHE LE VARIABILI DI STATO, DETTE INTERNE.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DISTINGUIAMO INOLTRE:

a) SISTEMI PROPRI → SISTEMI IN CUI L'INGRESSO NON INFLUENZA DIRETTAMENTE L'USCITA ($d=0$). SONO INDIVIDUATI DA UNA TERNA (A, b, c^T)

b) SISTEMI IMPROPRI → SISTEMA IN CUI L'INGRESSO INFLUENZA DIRETTAMENTE L'USCITA ($d\neq 0$). SONO INDIVIDUATI DALLA QUATERNA (A, b, c^T, d)

ESISTONO DEI SISTEMI SENZA INGRESSO, O AD INGRESSO NULLO ($b=0$), DETTI SISTEMI AUTONOMI. SE TALI SISTEMI SONO ANCHE SISTEMI PROPRI, SARANNO DESCRITTI DALLA COPPIA (A, c^T)

ES: LEGGE DI NEWTON

SI SUPPONGA CHE AD UNA MASSA PUNTIFORME m, VINCOLATA A SCORRERE SENZA ATTRITO LUNGO UNA RETTA, SIA APPLICATA UNA FORZA $u(t)$ NELLA DIREZIONE DELLA RETTA. DETTA $y(t)$ LA POSIZIONE DELLA MASSA, MISURATA RISPETTO AD UN PUNTO FISSO, LA LEGGE DI NEWTON AFFERMA CHE:

$$m\ddot{y}(t) = u(t)$$

LA STESSA LEGGE PUÒ TUTTAVIA ESSER POSTA NELLA FORMA DI UN SISTEMA LINEARE A TEMPO CONTINUO. PER QUESTO BASTA INDICARE CON $x_1(t)$ LA POSIZIONE DELLA MASSA E CON $x_2(t)$ LA SUA VELOCITÀ PER OTTENERE LE EQUAZIONI DI STATO

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1/m \cdot u(t) \end{cases}$$

E LA TRASFORMAZIONE DI USCITA

$$y(t) = x_1(t)$$

IN CONCLUSIONE, LA LEGGE DI NEWTON È DESCRITTA DA UN SISTEMA PROPRIO INDIVIDUATO DALLA TERNA

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/m \end{vmatrix} \qquad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A.2 MODELLO ARMA E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

ESISTE UN'ALTRA DEFINIZIONE DI SISTEMA LINEARE A TEMPO DISCRETO, SECONDO CUI IN UN SISTEMA DI QUESTO TIPO DI ORDINE n, UNA SOMMA PESATA DEGLI ULTIMI $(n+1)$ VALORI DI INGRESSO EGUAGLIA, IN OGNI ISTANTE DI TEMPO t, UNA SOMMA PESATA DEI CORRISPONDENTI VALORI DI USCITA, CIOÈ:

$$y(t+n) + \alpha_1 y(t+n-1) + \dots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u(t+n) + \beta_1 u(t+n-1) + \dots + \beta_n u(t) \qquad (S)$$

SE

$\beta_0 = 0 \Longrightarrow$ SISTEMA PROPRIO

$\beta_0 \neq 0 \Longrightarrow$ SISTEMA IMPROPRIO

QUESTA EQUAZIONE VIENE SPESSO USATA NELLA FORMA:

$$y(t) = \underbrace{\sum_1^n (-\alpha_i)\, y(t-i)}_{\text{AUTOREGRESSIONE}} + \underbrace{\sum_0^n \beta_i \, u(t-i)}_{\text{MEDIA MOBILE}}$$

PER QUESTO MOTIVO LA (S) È UNIVERSALMENTE NOTA COME MODELLO AUTOREGRESSIVO A MEDIA MOBILE O, PIÙ SINTETICAMENTE, MODELLO ARMA.

L'ANALOGO DELLA (S) A TEMPO CONTINUO È L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y^{(0)}(t) = \beta_0 u^{(n)}(t) + \beta_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_n u^{(0)}(t) \qquad (\epsilon)$$

DOVE $y^{(i)}(t)$ E $u^{(i)}(t)$ SONO LA DERIVATA i-ESIMA DI INGRESSO E USCITA. ANCHE QUESTO È DETTO MODELLO ARMA.

L'INTERPRETAZIONE DELLA LEGGE DI NEWTON, VISTA NELL'ESEMPIO, PUÒ COSÌ ESSER COMPLETATA NOTANDO CHE LA RELAZIONE:

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

È UN CASO PARTICOLARE DELLA (6) (MODELLO MA, CIOÈ MODELLO ARMA SENZA TERMINE AUTOREGRESSIVO)

LA (5) E LA (6) POSSONO ESSERE RISCRITTE NELLA FORMA GENERALE:

$$D(p)\cdot y(t) = N(p)\cdot u(t) \qquad (7)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DOVE $D(\cdot)$ E $N(\cdot)$ SONO DUE POLINOMI DI GRADO n:

$$D(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

$$N(p) = \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n$$

CON
$p \rightarrow$ OPERATORE DI ANTICIPO (TEMPO DISCRETO) $\Rightarrow p\,y(t) = y(t+1)$, $p^2 y(t) = y(t+2)$, ...
OPERATORE DI DERIVAZIONE (TEMPO CONTINUO) $\Rightarrow py(t) = \dot{y}(t)$, $p^2 y(t) = \ddot{y}(t)$, ...

ASSEGNARE UN MODELLO ARMA SIGNIFICA, QUINDI, ASSEGNARE I DUE POLINOMI $D(\cdot)$ E $N(\cdot)$ O, EQUIVALENTEMENTE, I $(2n+1)$ PARAMETRI $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \dots, n$ E $\{\beta_i\}$, $i = 0, \dots, n$.
SPESSO IL SIMBOLO p NELLA (7) VIENE SOSTITUITA DA
$z \rightarrow$ TEMPO DISCRETO;
$s \rightarrow$ TEMPO CONTINUO;

COSÌ, AD ESEMPIO, LA LEGGE DI NEWTON È INDIVIDUATA DA: $D(s) = s^2$, $N(s) = 1/m$.
NEL CASO IN CUI I DUE POLINOMI $D(\cdot)$ E $N(\cdot)$ SIANO PRIMI TRA LORO, CIOÈ NON ABBIANO ZERI IN COMUNE, IL MODELLO ARMA SI DICE DI TRASFERIMENTO.
IN QUESTI CASI, DATO CHE IL POLINOMIO $D(\cdot)$ È MONICO, CIOÈ HA UNA SOLA VARIABILE, LA COPPIA $[D(\cdot), N(\cdot)]$ È RICAVABILE DAL RAPPORTO $N(\cdot)/D(\cdot)$, NOTO COME FUNZIONE DI TRASFERIMENTO E INDICATO NEL SEGUITO CON $G(\cdot)$, CIOÈ:

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \qquad (8)$$

SE, INVECE, IL MODELLO ARMA NON È DI TRASFERIMENTO, CIOÈ SE:

$$N(p) = r(p)\cdot n(p)$$
$$D(p) = r(p)\cdot d(p) \qquad (9)$$

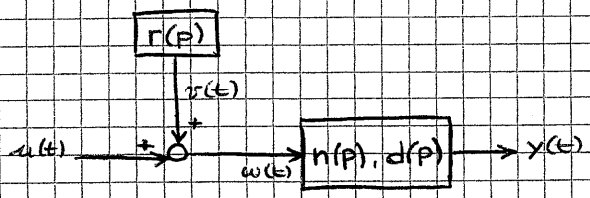
CON $n(\cdot)$ E $d(\cdot)$ PRIMI, LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (8) RISULTA UGUALE A $n(p)/d(p)$.
GLI ZERI DI $n(\cdot)$ E $d(\cdot)$ SI CHIAMANO, RISPETTIVAMENTE ZERI E POLI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO.
TENENDO CONTO DELLE (7) E (9) SI PUÒ VERIFICARE CHE UN MODELLO ARMA PUÒ ESSER SCOMPOSTO, IN UN MODELLO ARMA DI TRASFERIMENTO INDIVIDUATO DALLA COPPIA DI POLINOMI PRIMI $[n(\cdot), d(\cdot)]$

$$d(p)\cdot y(t) = n(p)\cdot \omega(t) \qquad (10)$$

IN UN MODELLO AR INDIVIDUATO DAI POLINOMI $[c, r(\cdot)]$

$$r(p)\cdot \nu(t) = \emptyset \qquad (11)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



INFATTI, MOLTIPLICANDO LA (10) PER $r(p)$ E TENENDO CONTO DELLA (11) E DEL FATTO CHE

$$\omega(t) = u(t) + \nu(t)$$

SI OTTIENE LA (7) CON $N(p)$ E $D(p)$ DATI DALLA (9).
IN ALTRE PAROLE, LA CONOSCENZA DELLA SOLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO NON PERMETTE IN GENERALE DI CALCOLARE L'USCITA DI UN SISTEMA A PARTIRE DAL SUO INGRESSO, A MENO CHE IL SEGNALE $\nu(\cdot)$ SIA IDENTICAMENTE NULLO, IL CHE SI VERIFICA QUANDO LE CONDIZIONI INIZIALI DEL MODELLO AR (11) SONO NULLE.

A.3 Di che si tratta

CONSIDERANDO IL SEMPLICE PROBLEMA DI MUOVERE UN CARRELLO DI MASSA m SU UN BINARIO SENZA ATTRITO, DA UNA POSIZIONE INIZIALE $p=0$ A UNA POSIZIONE DATA $p=\bar{p}$, POTENDO SCEGLIERE LA FORZA F DI SPINTA FORNITA DA UN APPOSITO ATTUATORE.
LA MASSA NOMINALE $\bar{m}$ DEL CARRELLO SIA NOTA, MA TALE VALORE DIFFERISCA DAL VALORE VERO, NON NOTO.

ENTRO UNA TOLLERANZA, AD ESEMPIO DEL 10%.
VOGLIAMO STABILIRE UNA LEGGE CHE DEFINISCA UN VALORE $F(t)$ DELLA SPINTA IN OGNI ISTANTE, TALE DA GARANTIRE CHE IL CARRELLO RAGGIUNGA LA POSIZIONE DESIDERATA CON PRECISIONE ELEVATA (DELL'ORDINE AD ESEMPIO DELL'1%) IN UN TEMPO SUFFICIENTEMENTE BREVE, SENZA MAI SUPERARE IL VALORE FINALE DESIDERATO.

UN APPROCCIO RAZIONALE AL PROBLEMA INIZIERÀ CON LA SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DEL MOTO DEL SISTEMA, CHE SONO IN QUESTO CASO ESTREMAMENTE SEMPLICI:

$$a(t) = F(t)/m$$

DOVE $a(t)$ INDICA L'ACCELERAZIONE DEL CARRELLO.
UNA PRIMA POSSIBILE SOLUZIONE POTREBBE ESSER DATA CALCOLANDO UNA PARTICOLARE LEGGE ORARIA PER $F(t)$ CHE OTTENGA LO SCOPO NEL CASO NOMINALE.
AD ESEMPIO, SI PENSI DI APPLICARE UNA FORZA COSTANTE F UN TEMPO T, SEGUITA DALLA FORZA OPPOSTA $-F$ PER UN TEMPO UGUALE:

$$f(t) = \begin{cases} F, & 0 < t \leq T \\ -F, & T < t \leq 2T \\ 0, & t > 2T \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

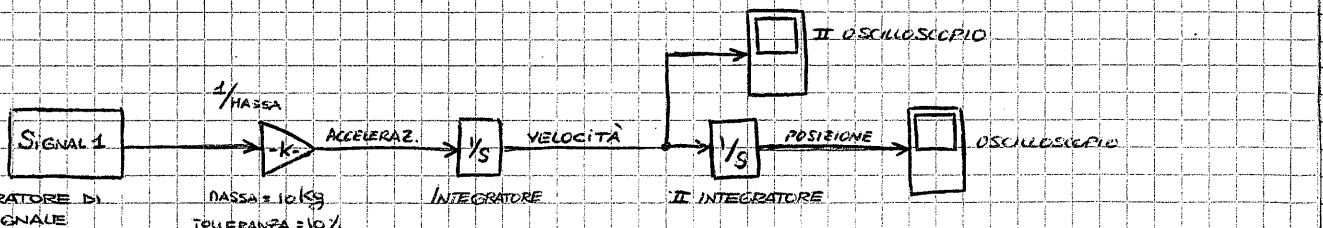
E SI PONGA UNA CONDIZIONE

$$2 \cdot \frac{F \cdot T^2}{2m} = \hat{p}$$

DA CUI FACILMENTE UNA SOLUZIONE PER F FISSATO T, O VICEVERSA.
QUESTA SOLUZIONE SAREBBE IN PRATICA SCELTA A MOLTI PROBLEMI:

- LA POSIZIONE FINALE RAGGIUNTA SAREBBE PARI A QUELLA DESIDERATA SOLO NEL CASO NOMINALE, MA SE NE DISCOSTEREBBE, IN REALTÀ, DI UNA QUANTITÀ DELLO STESSO ORDINE, IN REALTÀ, DI UNA QUANTITÀ DELLO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DELLA TOLLERANZA SULLA MASSA;
- SE IL SISTEMA FISICO DIFFERISCE DAL MODELLO MATEMATICO IN ALTRI PARAMETRI, AD ESEMPIO SE ESISTESSE UNA RESISTENZA DI ATTRITO AL MOTO, LA POSIZIONE FINALE NON RAGGIUNGEREBBE MAI LA POSIZIONE DESIDERATA;
- SE ANCHE TUTTO IL MODELLO FOSSE NOTO ESATTAMENTE MA LA POSIZIONE INIZIALE DELLA MASSA NON FOSSE ESATTAMENTE QUELLA ATTESA, LA POSIZIONE RAGGIUNTA SAREBBE DIVERSA DA QUELLA DESIDERATA. NEL CASO POI CHE IL CARRELLO AVESSE INIZIALMENTE VELOCITÀ NON NULLA, SEPPUR PICCOLA, ESSO SI ALLONTANEREBBE INDEFINITAMENTE DALLA POSIZIONE DESIDERATA.

PER VERIFICARE DIRETTAMENTE QUESTE OSSERVAZIONI, SONO MOLTO UTILI SOFTWARE DI SIMULAZIONE CON INTERFACCIA GRAFICA COME IL PACCHETTO Simulink DEL PROGRAMMA Matlab.
IN QUESTI PROGRAMMI I COMPONENTI DEI SISTEMI DINAMICI SONO RAPPRESENTATI DA BLOCCHETTI CON INGRESSI, USCITE E PARAMETRI, CHE POSSONO ESSERE TRA LORO COLLEGATI CON LINEE DIRETTE CHE SIMBOLEGGIANO LA TRASMISSIONE DI SEGNALI.
CON LO SCHEMA Simulink SEGUENTE SI REALIZZA LO SCHEMA SOPRA VISTO:



TRAMITE QUESTO SCHEMA SI VERIFICANO FACILMENTE GLI EFFETTI DEGLI ERRORI NEI PARAMETRI E NELLE CONDIZIONI INIZIALI.
QUESTI PROBLEMI POTREBBERO ESSERE AFFRONTATI SE LA FORZA DA APPLICARE, ISTANTE PER ISTANTE, VENISSE DECISA NON SULLA BASE DI UN PIANO PREORDINATO E FISSO, MA BASANDOSI SULL'ATTUALE EVOLVERE DEL SISTEMA.
DISPONENDO AD ESEMPIO DI UN SENSORE DI POSIZIONE CHE METTE A DISPOSIZIONE LA MISURA DI POSIZIONE ISTANTANEA DEL CARRELLO $p(t)$, SI POTREBBE PENSARE DI SCRIVERE LA LEGGE DI AZIONAMENTO DEL CARRELLO COME FUNZIONE DI TALE MISURA $F[p(t)]$
UN ESEMPIO ELEMENTARE DI UNA TALE LEGGE CONSISTE NELL'APPLICARE UNA FORZA PROPORZIONALE ALLA DISTANZA TRA LA POSIZIONE DESIDERATA E QUELLA ATTUALE, CIOÈ PORRE:

$$F = k(\hat{p} - p)$$

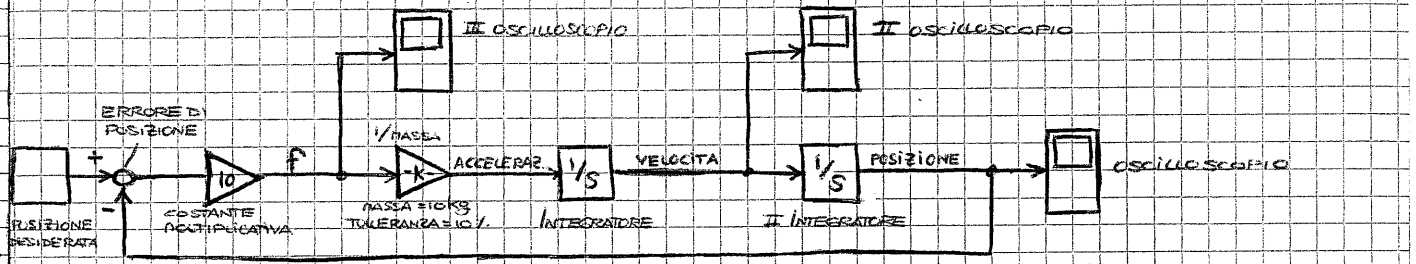
CON K UNA COSTANTE DA SCEGLIERSI OPPORTUNAMENTE.
QUESTO TIPO DI LEGGE È DETTO IN RETROAZIONE, ED HA BISOGNO DI TRE FONDAMENTALI ELEMENTI TECNOLOGICI PER LA REALIZZAZIONE:

1) ATTUATORE → IL MOTORE CHE GENERA LA SPINTA F;
2) SENSORE → MISURA LA POSIZIONE;
3) ELABORATORE → UTILIZZA LA MISURA DEL SENSORE, ED IL VALORE DESIDERATO, PER EFFETTUARE CALCOLI E TRASFORMARLI IN UN VALORE DI FORZA CHE DOVRÀ POI ESSER APPLICATO DALL'ATTUATORE.

È ANCHE INTERESSANTE NOTARE CHE L'EQUAZIONE DEL SISTEMA ORIGINALE, CON LA LEGGE DI SPINTA DESCRITTA, DIVIENE

$$m\ddot{q} + k(p - \hat{p}) = 0$$

COINCIDENDO QUINDI CON LA EQUAZIONE DI UN SISTEMA DI PARI MASSA COLLEGATO AD UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA K, A RIPOSO NELLA POSIZIONE $\hat{p}$ E INIZIALMENTE POSTO IN $p(t=0) = 0$. NE SEGUE CHE L'EVOLUZIONE DEL SISTEMA SAREBBE UN'OSCILLAZIONE INTORNO AL PUNTO $\hat{p}$ DESIDERATO, QUINDI NON SODDISFEREBBE LE RICHIESTE, SIA PERCHÈ SUPEREREBBE TALE POSIZIONE, SIA PERCHÈ NON SAREBBE MAI IN QUIETE IN ESSA, COME SI VERIFICA DALLO SCHEMA SEGUENTE:



UNA LEGGE CHE PUÒ RISOLVERE, AD ESEMPIO, TALE PROBLEMA, NEL CASO SI DISPONGA ANCHE DI UN SENSORE DI VELOCITÀ DEL CARRELLO, È DATA DA:

$$F = k(\hat{p} - p) - b\nu$$

DOVE:
ν → VELOCITÀ MISURATA DEL CARRELLO;
b → COSTANTE POSITIVA OPPORTUNA;

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TALE LEGGE ASSUME LA DISPONIBILITÀ, OLTRE CHE DI UNA MISURA DELLA POSIZIONE DEL CARRELLO, ANCHE DELLA SUA VELOCITÀ, QUINDI DI UN ULTERIORE SENSORE O NELLA CAPACITÀ DI EFFETTUARE UN'OPERAZIONE DIFFERENZIALE SUL SEGNALE DI POSIZIONE.
OPERAZIONI DI QUESTO GENERE (PRODOTTI E SOMME) POSSONO ESSERE OTTENUTE AGEVOLMENTE CON CIRCUITI ANALOGICI, CHE TRATTANO CIOÈ SEGNALI CONTINUI.

LE GRANDEZZE MISURATE, CHE SON CONTINUE, VENGONO DISCRETIZZATE, CIOÈ QUANTIZZATE, PER ESSER RAPPRESENTATE DA UN NUMERO FINITO DI BIT, E CAMPIONATE, CIOÈ TRASFORMATE DA FUNZIONI CONTINUE DEL TEMPO IN SUCCESSIONI ORDINATE DI VALORI CORRISPONDENTI A INTERVALLI DI TEMPO PREFISSATI.
QUESTA OPERAZIONE SI DICE CONVERSIONE DIGITALE/ANALOGICA.