28/09

Prova scritta: 1h con 2es
Libro: parte in fondo del libro di deterministici + comprare: prof. Verrazzani "Teoria dei segnali. segnali aleatori" (è il 2°vol)

Argomenti corso

1) Teoria probabilità → ci permette di dare una descrizione matematica su fenomeni che non sono prevedibili in maniera deterministica
2) Variabili Aleatorie
3) Processi stocastici

Es: caduta corpo che cade da un'altezza h: la vel con cui tocca terra è $\simeq \sqrt{2gh}$, se effettuo l'esperimento n volte mi aspetto lo stesso risultato a meno di piccole asc. (se le condiz. rimangono =) → è un es di esperim. deterministico, i cui risultato è prevedibile

→ es esperimento non prevedibile: lancio di una moneta, di un dado → la caratteristica comune è che non si può prevedere il risultato finale e questo dipende dal fatto che ci sono un'infinità di variabili e che non posso dot il risultato finale; quindi, ripetendo l'esperimento "n" volte avrò risultati ≠ (è quindi una quantità variab. che non riesco a prevedere)

↳ Ci sono però delle quantità caratteristiche che possono essere previste (quello che fa la teo. prob)

Teoria probabilità: è una descriz. mat dei segnali aleatori, parlerò segnali non prevedibili

2) Le vedremo poi..
3) Generalizz. dei concetti delle variab. aleatori; proces. stoc. si chiamano anche processi aleatori

→ Nei segn. deterministici



x(t) entra in un filtro con risp. impulsiva h(t) e devo dot l'out y(t) ⇒ tutto ciò è dot (x(t) e h(t) noti) → si poteva risolvere matematicamente

→ Nei segn. aleatori è ≠ perché non conosco esattamente l'espressione di x(t) (segn. d'IN) ⇒ x(t) può essere una qualsiasi forma d'onda prelevata all'interno di un'insieme di segnali → $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ → insieme di segn ⇒ non posso dot quale sia esattamente il segn. di OUT perché dipende dal tipo d. segn. IN. Il processo stocast. dipende anche dalla prob. di prelevare un certo segn. d'IN ($x_1(t)$ lo posso prelevare 9 volte su 10 mentre $x_2(t)$ 1 volta su 10 ⇒ OUT sist 9 volte su 10 è $y_1(t)$ e 1 su 10 $y_2(t)$) → quindi, la teoria dei processi stocastici è una teo che ci permette di affrontare lo studio in situazioni di questo tipo e caratterizzare in qualche modo y(t) senza conoscere esattamente x(t)

es:

$y(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \theta)$ con F_0 val fisso ma A e θ non sono val che conosco perché dipendono dal tipo di segn. d'IN selezionato

-> Posso dire, senza conoscere l'IN, la dens. spettrale di quel segnale è concentrata alla freq F_0 (a prescindere dalla aleatorietà nella conoscenza di $x(t)$)

↳ A prescindere da A e θ posso fare un filtro a banda stretta centrato in F_0

TEORIA PROBABILITÀ → fa uso dei concetti che riguardano gli insiemi

def insieme: un insieme S è una collezione di oggetti



$x \in S$

$y \notin S$

def insieme vuoto: insieme che non contiene alcun elem.

def insieme incluso in un altro insieme

S e T, $S \subset T$ quando ogni elem di S appartiene a T

se $S \subset T$ e $T \subset S \Rightarrow S = T$

def insiemi di dimensione finita e infinita

→ Finita: n° elem. insieme finito (es: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

→ infinita: devo fare la distinzione tra:

insieme ↗ numerabile: può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sotto insieme o con tutto l'insieme dei $\mathbb{N}$ (es: tutti i num pari)

↘ non-numerabile: es: num reali o un qualsiasi intervallo della retta reale $[0,1]$ ad es

Gli elem di questo insieme li indico facendo riferim ad una proprietà alla quale gli elem dell'insieme devono sottostare →

→ $S = \{x \mid x \text{ soddisfa } P\}$ (P è una certa proprietà)

es: $[0,1] \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

gli insiemi che considereremo sono sottoinsiemi di un insieme universale che viene indicato con Ω

Operazioni su insiemi

→ S sottoinsieme, $S \subset \Omega$, def. il complementare di S rispetto a Ω e lo indico con $\bar{S}$ oppure S_c l'insieme degli elem. di Ω che non appartengono a S

allora

$$\bar{S} = \{x \mid x \notin S\} \quad \| \text{do per scontato che } x \in \Omega$$

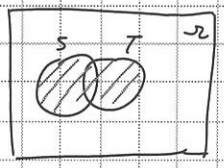
es: diagrammi di Venn



Operazioni su due o più insiemi

→ UNIONE, dati S, T, l'unione è def come $S \cup T$ ed è un op. che produce un altro insieme che contiene o gli elem. di S o gli elem. di T (può contenere anche entrambi)

es



"unione"

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ o } x \in T\} \quad \| \text{detta anche somma tra insiemi}$$

→ INTERSEZIONE, dati S, T, l'intersez. è def come $S \cap T$ ed è un op. che produce un altro insieme che contiene gli elem. che appartengono a S e T



"intersez."

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ e } x \in T\} \quad \| \text{detta anche prodotto tra insiemi}$$

(le due condiz devono avvenire contemporaneam.)

Se i due insiemi (questi sono DISGIUNTI quando l'intersezione è l'insieme vuoto (se T non hanno elem. in comune)

$$S \cap T = \emptyset$$

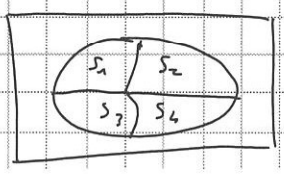
→ quando diciamo che n insiemi sono disgiunti? quando sono disgiunti a due a due ⇒ ovvero ogni coppia prendo ho che l'intersez. è sempre l'insieme vuoto

PARTIZIONE di un'insieme S: considero "n" sottoinsiemi di S con la seguente proprietà:

$S_i \cap S_j = \emptyset \quad i \neq j$ ⇒ significa che sono disgiunti (con $S = \{\underbrace{S_1, S_2, \dots}_{\text{sono } n}\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} S_i = S$ ‖ l'unione di tutti gli S_i deve essere = a S

es:



→ $S_{1,\dots,3}$ non sono una partizione di S perché anche se sono disgiunti la loro unione non mi da S perché manca S_4

→ $S_{1,\dots,4}$ invece è una partizione

→ la parte di un insieme non è univoca

→ Se ho un'insieme S con "n" elem. quanti sottoinsiemi distinti di S posso trovare? 2^n comprende l'insieme vuoto e quello tot

es:

$S = \{1,2,3\}$, sottoinsieme: $\emptyset$, $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$, $\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$ ⇒ il n° d. sottoinsiemi è $8 = 2^3 = 2^n$

da dove viene fuori il 2^n? Prendo i sottoinsiemi di diversa dimensione, cioè ci di dimens. k

→ quanti sono i sottoins. di dimens. k? è pari al n° di combinazioni di n elem a gruppi di k che si indica con $\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right]$

per ottenere il n° tot di sottoinsiemi devo fare la $\sum$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ e non a caso $\binom{n}{k}$ si chiamano coef. binomiali; si chiamano così perché:

$\left[(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right]$ // formula pot n-sima di un binomio

→ suppongo $a=b=1$ ⇒ diventa $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Proprietà unione e intersezione

→ Commutative (cambi)

$S \cup T = T \cup S$ e $S \cap T = T \cap S$

→ Associativa

$S \cup (T \cup Z) = (S \cup T) \cup Z$ e $S \cap (T \cap Z) = (S \cap T) \cap Z$

→ Distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma

$S \cap (T \cup Z) = (S \cap T) \cup (S \cap Z)$, abbiamo anche → $S \cup (T \cap Z) = (S \cup T) \cap (S \cup Z)$

→ $S \cup S = S$ e $S \cap S = S$

→ $S \cap \bar{S} = \emptyset$

→ $S \cup \bar{S} = \Omega$

Leggi di De Morgan

$\overline{S \cap T} = \bar{S} \cup \bar{T}$ // il complementare dell'intersez. è = all'unione dei complementari

$\overline{S \cup T} = \bar{S} \cap \bar{T}$ // il complementare dell'unione è = all'intersez. dei complementari

comincio a parlare della teo della prob. → si occupa di esperim. aleatori ovvero per i quali non è possibile predire det il risultato dell'esperimento

Terminologia

→ w_i : possibili risultati esperimento
es: lancio moneta → risultati possibili: testa o croce

w_i può essere finito o infinito

→ SPAZIO CAMPIONARIO (o spazio campione), si indica con Ω ed è l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento
es: lancio moneta

$\Omega = \{T, C\}$ // testa e croce

→ EVENTO, ad es l'evento A: è un sottoinsieme dello spazio campionario, quindi un sottoinsieme di Ω
es: lancio dado

Prendo l'insiem $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considero l'evento $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$

se il risultato $\in$ all'evento A $\Rightarrow$ diciamo che l'evento A si è verificato

quindi
se esce 2 $\Rightarrow$ si è verificato A e B
se esce 4 $\Rightarrow$ si è verificato solo A ma non B

→ EVENTO CERTO: Ω (spazio campionario) è un evento certo, si verifica qualunque sia il risultato
↑ è anche l'unico insieme che gode di questa proprietà

→ EVENTO IMPOSSIBILE: $\overline{\Omega} = \emptyset$, essendo un evento deve essere un sottoins. di Ω, si chiama impossibile perché non si può verificare mai, e l'unico insieme che non si verifica mai, è l'insieme vuoto

→ EVENTO ELEMENTARE: sottoinsieme di Ω di dimensione 1, il cui elem. quindi corrisponde al risultato di un certo esperimento

notazione → $\{w_i\}$ // è un insieme il cui unico risultato è w_i

es: testa/croce → $\{T\}$, $\{C\}$; in generale $\{w_i\}$ perché $\begin{matrix} w_1 = T \\ w_2 = C \end{matrix}$