segnale → funzione matematica che varia nel dominio del tempo



caratteristiche di un segnale:

→ Determinatico (valore noto $\forall t$)
→ Aleatorio (valore non noto esattamente $\forall t$)

→ Dominio → segnale tempo continuo: la variabile indipendente varia in maniera continua in un certo intervallo
→ segnale tempo discreto: la variabile indipendente assume valori interi e non varia con continuità

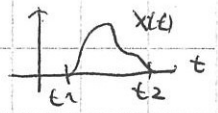
→ Codominio → ampiezza continua: il segnale può assumere tutti gli ampiezze ha un valore massimo e un valore minimo
→ ampiezza discreta: il segnale assume un valore finito di ampiezze

→ Periodo → periodico tempo continuo $x(t)=x(t+T_0)\ \forall t$
→ periodico tempo discreto $x(n)=x(n+N_0)\ \forall n \quad N_0 \in \mathbb{Z}$

- La somma di due segnali periodici tempo continui è un segnale periodico se i periodi stanno in un rapporto razionale (1) $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ $\quad x_1(t)=x_1(t+T_1)$ $\quad x_2(t)=x_2(t+T_2)$
  allora se $\frac{T_1}{T_2}=\frac{h}{m}$ è periodico di $T=mT_1=hT_2$
- Il prodotto tra due segnali periodici è sempre un segnale periodico (se i periodi sono multipli allora il periodo del prodotto è di valore maggiore)
- La combinazione lineare tra due segnali periodici tempo discreti è sempre un segnale periodico (2)

grandezze caratteristiche di segnali:

- Durata $D_x=t_2-t_1$ $\quad t_2 \to$ più grande t per cui $t>t_2\ x(t)=0$ $\quad t_1 \to$ più piccolo t per cui $t<t_1\ x(t)=0$



- Energia $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$ → potenza istantanea $\quad$ se l'integrale converge allora il segnale è a energia finita
- Valor medio $m_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt \qquad m_x=\frac{1}{T_0}\int_{CT_0}x(t)\,dt$ se periodico
- Potenza $P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)\,dt \qquad P_x=\frac{1}{T_0}\int_{CT_0}x^2(t)\,dt$ se periodico
- Se un segnale è a energia finita allora → $P_x=0$ perché in P_x $\int \to$ numero finito e $\frac{1}{T}\to 0$ quindi il rapporto tende a zero
  → $m_x=0$ (vedi dim)

si può dimostrare in 2 modi:

- Dim 1
  $x(t)$ segnale con E_x finita $\quad y(t)=x(t)-(m_x) \to$ valor medio di $x(t)$

$$P_y=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}y(t)^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}(x(t)-m_x)^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)+m_x^2-2m_x x(t)\,dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)\,dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot m_x^2\int_{-T/2}^{+T/2}1\,dt-\lim_{T\to\infty}\frac{2m_x}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt$$

$$=\cancel{P_x}+m_x^2-2m_x^2=-m_x^2 \Rightarrow m_x=0$$ in quanto la potenza è per def. una quantità positiva

- Dim 2 (Condizione di Cauchy-Schwartz)

$$\left[\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right]^2\le\int_a^b x^2(t)\,dt\cdot\int_a^b y^2(t)\,dt$$

$\lim_{T\to\infty}$ a dx e sx

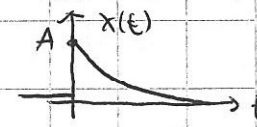
$$\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt\right]^2\le\frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)\,dt\cdot\int_{-T/2}^{T/2}1^2\,dt=\frac{1}{T^2}\cdot\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)\,dt\cdot T=P_x=0$$

$(m_x)^2\le 0 \Rightarrow m_x=0$ in quanto una quantità al quadrato non può essere negativa



Segnali fondamentali

- esponenziale monolatero



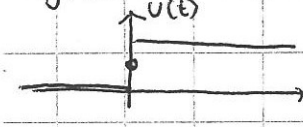
$x(t) = A \cdot e^{-t/T} \cdot u(t) \quad T > 0$

- segnale aperiodico
- segnale a energia finita $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A e^{-t/T} u(t)\right)^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t/T} dt =$

$= A^2 \left[-\frac{T}{2} e^{-2t/T}\right]_0^{+\infty} = 0 - A^2\left(-\frac{T}{2}\right) = \frac{A^2 T}{2}$

- segnale a potenza e valor medio nullo

- gradino unitario (funzione di Heaviside)



$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}$

- segnale a energia infinita
- Potenza $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left[T\right]_0^{T/2} = \frac{1}{T}\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$
- valor medio $m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt = \frac{1}{2}$
- se ampiezza A allora $P_x = \frac{A^2}{2} \quad m_x = \frac{A}{2}$

ANALISI DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

- ogni segnale sinusoidale è autofunzione di un SLS. Ovvero dato una sinusoide in ingresso a un SLS, l'uscita avrà la stessa frequenza dell'ingresso, ma fase e ampiezza diverse
- Se riesco ad approssimare ogni $x(t)$ periodico con una somma di sinusoidi allora posso facilmente calcolare $y(t)$

$x(t) = x(t+T_0) \ \forall t \Rightarrow x(t) \simeq A_0 + \underbrace{2}_{\text{convenienza matematica}} \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$

- $f_n = n f_0$ in quanto le sinusoidi devono ricadere a multipli interi della fondamentale
- A_n, φ_n è nato con il criterio di ottimalità

Definisco $S_N(t) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{N} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n) \overset{\text{ovvero } \cos\alpha = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}}{=} A_0 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} A_n e^{j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{2} e^{-j(\cdots)} =$

necessaria somma da $n=-N$

$S_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n e^{j(2\pi n f_0 t + \varphi_n)} + \sum_{n=-N}^{-1} A_{-n} e^{j(2\pi n f_0 t - \varphi_{-n})}$ pongo $X_n = \begin{cases} A_0 & n=0 \\ A_n e^{j\varphi_n} & n>0 \\ A_{-n} e^{-j\varphi_{-n}} & n<0 \end{cases}$

$S_N(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{N} X_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=-N}^{-1} X_n e^{j2\pi n f_0 t} = \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{j2\pi n f_0 t}$ Forma compressa di Fourier

- Tramite il criterio di ottimalità cerco X_n e φ_n da regole approx. $x(t) \simeq S_N(t)$

$\min \int_{T_0} |x(t) - S_N(t)|^2 dt \Rightarrow \boxed{X_n = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt}$ formula di Eulero

errore quadratico medio

oss. $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ la velocità con cui tendono a zero dipende dalla regolarità di $x(t)$. Più è grande e più si tendono velocemente

$\lim_{N\to\infty} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t) - S_N(t)|^2 dt = 0$ al crescere di N l'errore quadratico medio tende a zero ma non implica che $\lim_{N\to\infty} S_N(t) = x(t)$

- Per ricavare $x(t)$ a partire dagli X_n

$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} X_n e^{-j2\pi n f_0 t} dt \Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi n f_0 t}$ ipotesi non sempre vera $= x(t)$

Se tale ipotesi è verificata allora $\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n f_0 t}}$ Formula di Sintesi

DIM Ricavo eq. di analisi a partire da eq. di sintesi

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \Rightarrow x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} = e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

$x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \cdot e^{j2\pi f_0 t (k-n)}$ integro entrambi i membri su T_0

$\int_{CT0} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \int_{CT0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi f_0 t (k-n)} dt$ ipotesi posso scambiare somma e integrale

$\int_{CT0} x(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \int_{CT0} e^{j2\pi f_0 t (k-n)} dt = \begin{cases} T_0 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

$\int_{CT0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0 \Rightarrow X_n = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$

Base di sviluppo di Fourier → è l'insieme degli spaziando compresi a frequenza multipla di f_0. Qualunque segnale periodico può essere espresso come combinazione lineare di questi termini

$\{ e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = -\infty, \dots, +\infty \}$

• vale la proprietà di ortogonalità $\int_{CT0} e^{j2\pi k f_0 t} \cdot e^{j2\pi n f_0 t} dt = 0$ se $k \neq n$

Trasformata di una costante

$x(t) = A \Rightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} A e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \cdot \begin{cases} T_0 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$X_k = \begin{cases} A & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$\cos(2\pi k f_0 t) = j \sin(2\pi k f_0 t)$

Trasformata del coseno $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \alpha)$ $T_0 = 1/f_0$

$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} \cdot \frac{A}{2} \cdot \left(e^{j(2\pi f_0 t + \alpha)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \alpha)} \right) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$X_k = \frac{A}{2T_0} \int_{CT0} e^{j(2\pi f_0 t + \alpha)} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt + \frac{A}{2T_0} \int_{CT0} e^{-j(2\pi f_0 t + \alpha)} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$X_k = \frac{A}{2T_0} \cdot e^{j\alpha} \int_{CT0} e^{-j2\pi f_0 t (k-1)} dt + \frac{A}{2T_0} \cdot e^{-j\alpha} \int_{CT0} e^{-j2\pi f_0 t (1+k)} dt$

$X_k = \frac{A}{2T_0} \cdot e^{j\alpha} \cdot \begin{cases} T_0 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} + \frac{A}{2T_0} e^{-j\alpha} \cdot \begin{cases} T_0 & k=-1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\alpha} & k=1 \\ \frac{A}{2} e^{-j\alpha} & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$

Proprietà di simmetria hermitiana

• se $x(t) \in \mathbb{R}$ e $x(t) = x(t + kT_0)$ allora $X_k = X_{-k}^*$

DIM

$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$X_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{CT0} \left(x(t) \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} \right)^* dt =$ (uscita $x(t) \in \mathbb{R}$)

$= \left(\frac{1}{T_0} \int_{CT0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right)^* = X_k^*$

Forma polare reale della serie di Fourier $\boxed{x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)}$ $x(t) \in \mathbb{R}$

DIM

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ nella prima somma $k = -k$

$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(X_k e^{j2\pi k f_0 t} + X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} \right)$

Siccome $x(t) \in \mathbb{R}$ allora gode di simmetria hermitiana quindi $X_{-k} = X_k^*$ quindi X_k e X_{-k} avranno stesso modulo ma fase opposta, essendo uno il complesso coniugato dell'altro

$X_k = A_k e^{j\varphi_k}$ $k>0$ $\quad X_{-k} = A_k e^{-j\varphi_k}$ $k<0$ $\quad A_k = |X_k|$, $\varphi_k = \sphericalangle X_k$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k e^{j\varphi_k} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} + A_k e^{-j\varphi_k} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\right)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \left[e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}\right] = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

Forma reale rettangolare della serie di Fourier $\boxed{x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)]}$

DIM

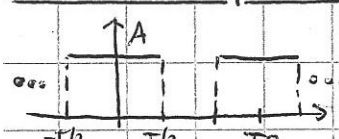
Dalla forma vista prima applico la formula trigonometrica $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) = \cos(2\pi k f_0 t)\cdot\cos(\varphi_k) - \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)\cdot\operatorname{sen}(\varphi_k)$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2A_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2A_k [\cos(2\pi k f_0 t)\cos(\varphi_k) - \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)\cdot\operatorname{sen}(\varphi_k)]$$

Pongo $\begin{cases} a_0 = A_0 \\ a_k = A_k \cos(\varphi_k) = \operatorname{Re}(X_k) \\ b_k = A_k \operatorname{sen}(\varphi_k) = \Im m(X_k) \end{cases} \rightarrow x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_0 t) - b_k \operatorname{sen}(2\pi k f_0 t)$

Treno di impulsi rettangolari troncato



$T \rightarrow$ durata $T_0 \rightarrow$ periodo $A \rightarrow$ ampiezza $\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{T}{T_0}}$ duty cycle

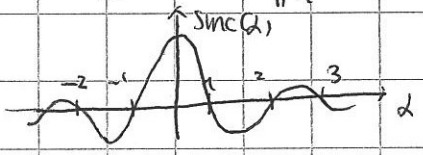
Valor medio $X_0 = A\cdot\delta = A\cdot\frac{T}{T_0}$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{CT_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} A\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{A}{T_0}\left[-\frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{T_0}\left[-\frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot e^{-j2\pi k f_0 \frac{T}{2}} + \frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot e^{j2\pi k f_0 \frac{T}{2}}\right]$$

$$= \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{j2\pi k f_0}\left(e^{j\pi k f_0 T} - e^{-j\pi k f_0 T}\right) = \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{j2\pi k f_0}\cdot \operatorname{sen}(\pi k f_0 T)\cdot 2j = \frac{A}{\pi k}\cdot\operatorname{sen}(\pi k\delta)\cdot\frac{\pi}{\pi}$$

$= A\delta\,\operatorname{sinc}(k\delta)$ $\qquad \operatorname{sinc}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}{\pi\alpha} & \alpha \neq 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$



Errore quadratico medio VS errore massimo

- All'aumentare di N di $S_N(t)$ con cui approssimo $x(t)$ diminuisce l'errore quadratico medio $\int_{CT_0}|x(t)-S_N(t)|^2 dt$ ma non l'errore massimo $|x(t)-S_N(t)|$. Infatti se diminuisce l'errore quadratico medio non implica che $S_N(t) \rightarrow x(t)$ punto per punto anzi di più.

Funzioni matematiche regolari a tratti

- Una funzione matematica si dice regolare a tratti quando essa e la sua derivata sono continue ovunque tranne in un numero finito di punti dove presentano discontinuità di prima specie, ovvero dove le limite destro e le limite sinistro sono diversi ma finiti
- Sono funzioni per cui è ampia validità l'ipotesi fatta per ricavare l'equazione di Sinteti ovvero che $\lim_{N\to\infty} S_N(t) = x(t)$, nei punti di continuità
- Nei punti di discontinuità $\lim_{N\to\infty} S_N(\bar{t}) = \frac{\lim_{t\to\bar{t}^-} x(t) + \lim_{t\to\bar{t}^+} x(t)}{2}$ $\quad \bar{t}$ punto di discontinuità

Teorema del cambiamento di scala

- Dato $x(t) = x(t+T_0)$ e con coeff. x_k, allora $y(t) = x(\alpha t)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ ha $y_k = \begin{cases} x_k & \alpha > 0 \\ x_{-k} & \alpha < 0 \end{cases}$

$|\alpha| > 1 \rightarrow$ compressione di $x(t)$ $\quad 0 < |\alpha| < 1 \rightarrow$ espansione di $x(t)$

DIM

① È periodica $y(t)$?

$y(t) = y(t+T_1) \quad \forall t \qquad x(\alpha t) = x[\alpha(t+T_1)] = x(\alpha t + \alpha T_1) \qquad \alpha T_1 = T_0$

Quindi $y(t)$ è un segnale periodico di $T_1 = T_0/|\alpha|$ $\qquad (\alpha T_y = T_x)$

② Calcolo i coeff. di $y(t)$

$$y_u = \frac{1}{T_1}\int_{\langle T_1\rangle} y(t)\, e^{-j2\pi u f_1 t}\,dt = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} y(t)\, e^{-j2\pi u t \frac{1}{T_1}}\,dt = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(\alpha t)\, e^{-j2\pi u t \frac{1}{T_1}}\,dt$$

$\alpha t = \tau \qquad d\tau = \alpha\, dt$

$$y_u = \frac{1}{T_1}\int_0^{\alpha T_1} x(\tau)\, e^{-j2\pi u \cdot \frac{1}{T_1}\cdot\frac{\tau}{\alpha}}\,\frac{d\tau}{\alpha} \qquad \alpha T_1 = \alpha T_0 = \text{sign}(\alpha)\cdot T_0$$

$$y_u = \frac{1}{\text{sign}(\alpha)}\int_0^{\text{sign}(\alpha)T_0} x(\tau)\, e^{-\frac{j2\pi u \tau}{\text{sign}(\alpha)\cdot T_0}}\,d\tau$$

$\boxed{\alpha > 0} \Rightarrow \text{sign}(\alpha) = 1$

$$y_u = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(\tau)\, e^{-\frac{j2\pi u \tau}{T_0}}\,d\tau = X_u$$

$\boxed{\alpha < 0} \Rightarrow \text{sign}(\alpha) = -1$

$$y_u = -\frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(\tau)\cdot e^{\frac{j2\pi u \tau}{T_0}}\,d\tau = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(\tau)\, e^{\frac{j2\pi u \tau}{T_0}}\,d\tau = X_{-u}$$



Equazione di analisi per segnali pari $\boxed{X_u = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(2\pi u f_0 t)\,dt}$

- Se un segnale è reale e pari anche i suoi coeff. sono reali e pari

DIM

$$X_u = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{\emptyset} x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\,dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\,dt$$

Nel primo integrale effettuo un cambio di variabile $t = -t$

$$X_u = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} \underbrace{x(-t)}_{\downarrow x(t)}\, e^{j2\pi u f_0 t}\,dt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\,dt \quad (*)$$

$$X_u = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\left[e^{j2\pi u f_0 t} + e^{-j2\pi u f_0 t}\right]dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cdot\cos(2\pi u f_0 t)\cdot 2$$

Equazione di analisi per segnali dispari $\boxed{X_u = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cdot\text{sen}(2\pi u f_0 t)\,dt}$

- Se un segnale è reale e dispari, i suoi coeff. sono dispari e immaginari puri

DIM

$$X_u = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left(x(-t)\, e^{j2\pi u f_0 t} + x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\right)dt \qquad \text{parto da } (*) \text{ di DIM precedente}$$

$$X_u = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} -x(t)\, e^{j2\pi u f_0 t} + x(t)\, e^{-j2\pi u f_0 t}\,dt = -\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\left(e^{j2\pi u f_0 t} - e^{-j2\pi u f_0 t}\right)dt$$

$$X_u = -\frac{2j}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\,\text{sen}(2\pi u f_0 t)\,dt$$

Simmetria pari e simmetria dispari

Riprendo la forma reale trigonometrica $x(t) = \underbrace{a_0}_{①} + 2\sum_{u=1}^{+\infty} a_u\cos(2\pi u f_0 t) - 2\sum_{u=1}^{+\infty} b_u\,\text{sen}(2\pi u f_0 t)$

- a_0: rappresenta segnali con simmetria pari, $c(t) = c(-t)$
- $\sum a_u\cos$: rappresenta segnali con simmetria pari
- $\sum b_u\,\text{sen}$: rappresenta segnali con simmetria dispari, $s(t) = -s(-t)$