Algebra

VETTORI

Algebra lineare : è un elemento di uno spazio vettoriale

vettore → segmento orientato $\leq$ direzione, modulo, verso



$\vec{0}$: vettore nullo

modulo nullo, verso e direzione indeterminati

VERSORE → vettore di lunghezza unitaria

caratterizza gli altri vettori → individua direzione

Componenti cartesiane : $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

$\mathbb{R}^n$: vettore → n-upla ordinata di elementi

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

Norma $v := \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

OPERAZIONI TRA VETTORI

Siano $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$

SOMMA

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

// stessa cosa per differenza: somma tra $\vec{v}$ e $(-\vec{w})$ ↑ opposto $\vec{w}$

Proprietà somma

Commutativa; associativa; $\vec{0}$: elemento neutro; $\forall \vec{v}$ $\exists!$ $-\vec{v}$ t.c. $\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$

PRODOTTO PER UNO SCALARE

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \vec{v}$

$$\lambda \vec{v} = \lambda (v_1, v_2 \dots v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$$

Proprietà
- distributiva rispetto somma vettori
- distributiva rispetto somma scalari
- omogeneità: $\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
- $\exists$ elemento neutro → $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

PRODOTTO SCALARE

Tra due vettori

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$$

e

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

PROPRIETÀ

1) Commutativa : $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

2) Omogeneità : $\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

3) Distributiva : $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$

4) Associativa non ha senso!

5) se $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono i vettori assi $\mathbb{R}^3$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$
$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

6) $\boxed{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{w}}$

NORMA VETTORE

$\vec{v} = (v_1, \dots v_n) \in \mathbb{R}^n$

Norma $\vec{v}$ è un'applicazione che a $\vec{v}$ associa un numero $\mathbb{R}$

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Norma indotta dal prodotto scalare euclideo

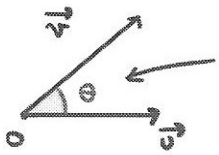
PROPRIETÀ

1) $\|\vec{v}\| \geq 0$ e $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
2) $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
3) $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ ← Disuguaglianza Cauchy-Schwarz
4) $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ ← Disuguaglianza triangolare

ANGOLO tra VETTORI

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$ con



Angolo convesso!

Prodotto Scalare nullo e vettori ortogonali

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta$

↓

Due vettori non nulli sono $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

Se $\vec{v} \perp \vec{w}$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 0$

master COPY

↳ Prodotto scalare

geometricamente può essere interpretato come il prodotto tra la lunghezza di un vettore per lunghezza della proiezione ortogonale dell'altro vettore su di esso!

PRODOTTO VETTORIALE

Siano $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \wedge \vec{w}$

↳

$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin\theta$

master COPY

↑ Angolo convesso

↕

Vettore — direzione $\perp$ al piano generato da $\vec{v}, \vec{w}$

verso: regola mano dx

$\vec{v}, \vec{w}$: stesso punto di applicazione