NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ $\Rightarrow$ a PARTE REALE, b PARTE IMMAGINARIA

OPERAZIONI IN FORMA ALGEBRICA $\quad \sqrt{-1} = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

SOMMA: $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

DIFFERENZA: $(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$

PRODOTTO: $(a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

RAPPORTO: $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{a+ib}{c+id} \cdot \dfrac{c-id}{c-id} = \dfrac{ac - iad + ibc - i^2 bd}{c^2 - (id)^2}$ $\quad i^2 = -1$

$= \dfrac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

POTENZA: TRIANGOLO DI TARTAGLIA, $(a+ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2$

OPERAZIONI IN FORMA TRIGONOMETRICA: $r[\cos\theta + i \sin\theta] = re^{i\theta}$

SOMMA: $r(\cos\theta + i\sin\theta) + s(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = (r\cos\theta + s\cos\theta_2) + i(r\sin\theta + s\sin\theta_2)$

DIFFERENZA: $r(\cos\theta + i\sin\theta) + s(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = (r\cos\theta - s\cos\theta_2) + i(r\sin\theta - s\sin\theta_2)$

PRODOTTO: $r(\cos\theta + i\sin\theta) + s(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r \cdot s\,[\cos(\theta + \theta_2) + i\sin(\theta + \theta_2)]$

RAPPORTO: $\dfrac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{s(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \dfrac{r}{s} \cdot [\cos(\theta - \theta_2) + i\sin(\theta - \theta_2)]$

POTENZA: $(re^{i\theta})^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)]$ (FORMULA DI DE MOIVRE)

OPERAZIONI IN FORMA ESPONENZIALE: $re^{i\theta}$

SOMMA e DIFFERENZA, ci si riconduce alla forma trigonometrica

PRODOTTO: $re^{i\theta} \cdot se^{i\theta_2} = r \cdot s\, e^{i(\theta + \theta_2)}$

RAPPORTO: $\dfrac{re^{i\theta}}{s \cdot e^{i\theta_2}} = \dfrac{r}{s} \cdot e^{i(\theta - \theta_2)}$

- $(5+4i) + (7-8i) = (5+7) + i(4-8) = 12 - 4i$
- $(5+4i) - (7-8i) = (5-7) + i(4+8) = -2 + 12i$
- $(5+4i) \cdot (7-8i) = (35+32) + i(-40+28) = 67 - 12i$
- $\dfrac{5+4i}{7-8i} = \dfrac{5+4i}{7-8i} \cdot \dfrac{7+8i}{7+8i} = \dfrac{(35-32) + i(40+28)}{7^2 + 8^2} = \dfrac{3}{49+68} + i\dfrac{68}{49+63} = \dfrac{3}{113} + i\dfrac{68}{113}$
- $\dfrac{-23+14i}{2-5i} \cdot \dfrac{2+5i}{2+5i} = \dfrac{-46 - 115i + 28i + 70i^2}{2^2 + 5^2} = \dfrac{-46-70}{29} + i\dfrac{28-115}{29} = \dfrac{-116}{29} - \dfrac{87}{29}$ $= -4 - 3i$
- $\dfrac{1+50i}{-6+5i} \cdot \dfrac{-6-5i}{-6-5i} = \dfrac{-6 - 5i - 300i - 250i^2}{(-6)^2 - 5^2 i^2} = \dfrac{244}{61} - \dfrac{305i}{61} = 4 - 5i$

$(4 - 5i) + (1 + i) = 5 - 4i$

CONIUGATO $a+ib \Rightarrow a-ib$

$(a+ib)\cdot(a-ib) = |a+ib|^2$

CONIUGATO $r[\cos\vartheta + i\sin\vartheta] = r[\cos\vartheta - i\sin\vartheta]$

$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta$, $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$

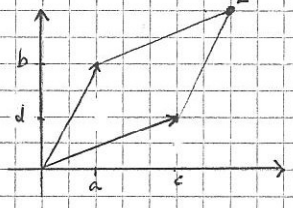
= SAREBBE $r[\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)]$

PROPRIETÀ CONIUGATO:

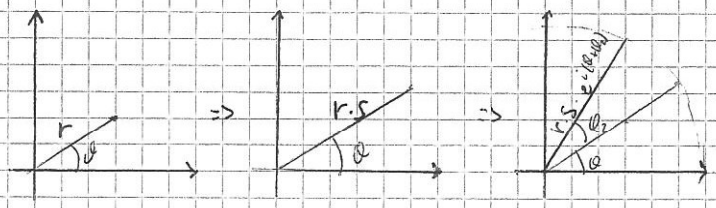
- IL CONIUGATO DI UN NUMERO REALE È UGUALE AL NUMERO STESSO
- LA SOMMA TRA NUMERO $\mathbb{C}$ + IL SUO CONIUGATO = 2 · PARTE REALE
- LA DIFFERENZA TRA NUMERO $\mathbb{C}$ − IL SUO CONIUGATO = $2i$ · PARTE IMMAGINARIA
- IL PRODOTTO TRA NUMERO $\mathbb{C}$ E IL SUO CONIUGATO = (VALORE ASSOLUTO NUMERO COMPLESSO)^2
  ↳ = QUADRATO DEL MODULO
- L'INVERSO DEL CONIUGATO = CONIUGATO DELL'INVERSO $\Rightarrow (\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

$$z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad , \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$(a+ib)-(c+id) \Rightarrow$



$re^{i\vartheta}\cdot se^{i\vartheta_2}$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

IN UN POLINOMIO A COEFFICIENTI COMPLESSI DI GRADO $n>0$ ESISTONO n RADICI COMPLESSE CONTATE CON MOLTEPLICITÀ

DATO UN POLINOMIO A COEFFICIENTI REALI, SE α È RADICE COMPLESSA DEL POLINOMIO, ANCHE $\bar{\alpha}$ È RADICE. => COPPIA DI RADICI CONIUGATE COMPLESSE

RADICE COMPLESSA IN FORMA TRIGONOMETRICA: (LE RADICI CORRISPONDONO AI VERTICI DI UN POLIGONO REGOLARE DI n LATI (n VERTICI) INSCRITTO NELLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO $\sqrt[n]{r}$ SE $n\geq 3$)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\left(\frac{\vartheta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

- RADICI QUARTE DI $z = 3+i\sqrt{3}$
  - $r = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\vartheta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
  - $z = 2\sqrt{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

RADICI: $\sqrt[4]{2\sqrt{3}}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)\right]$, con $k = 0, \ldots, 3$

radici di un numero complesso (radici quadrate) $\Rightarrow (x+iy)^2 = a+ib$

radici quadrate di $(3-4i)^2$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$$

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} x^2 = \frac{8}{2} = 4 \\ x^2 = -\frac{2}{2} = -1 \text{ ✗} \\ \downarrow \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x^2 = 4, \quad x = \pm 2$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -\frac{2}{x_{1,2}} = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 = 2 - i, \quad z_2 = -2 + i$$

master COPY

VETTORI

VETTORI IN $\mathbb{R}^2$ HANNO COORDINATE (x, y)
VETTORI IN $\mathbb{R}^3$ HANNO COORDINATE (x, y, z)

UN VETTORE È L'ELEMENTO DI UNO SPAZIO VETTORIALE

IL VETTORE $\vec{v}$ È IL SEGMENTO ORIENTATO DALL'ORIGINE AL PUNTO V DELLO SPAZIO

IL VETTORE NULLO È IL VETTORE $\vec{0}$, CHE È IL VETTORE ASSOCIATO ALL'ORIGINE

OPERAZIONI PRINCIPALI: $V = (x, y, z)$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\lambda \cdot \vec{v} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$\vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$$

$\vec{v} \cdot (-1) = -\vec{v}$ $\Rightarrow$ VETTORE SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE

OPERAZIONI SU VETTORI

1) $\vec{v} \cdot 1 = \vec{v}$
2) $\vec{v} \cdot 0 = \vec{0}$
3) $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
4) $\forall \vec{v} \; \exists -\vec{v}$, cioè un vettore per cui $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$
5) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
6) $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
7) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$ $\Rightarrow$ $\mu \cdot \vec{v}$ = PRODOTTO SCALARE $= \lambda \cdot (\cdots)$
$\lambda \cdot \mu$ = PRODOTTO TRA REALI
8) $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$
9) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$

master COPY

CON VETTORI IN $\mathbb{R}^2$ SI PARLA DI RETTE
CON VETTORI IN $\mathbb{R}^3$ SI PARLA DI PIANI

$\lambda \vec{v}$ = SONO I PUNTI DELLA RETTA FORMATA DAL VETTORE

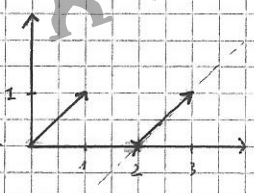
PER LA DEFINIZIONE DI VETTORE CHE ABBIAMO DATO, SE LA RETTA NON PASSA PER L'ORIGINE LA DEVO TRASLARE CIOÈ DEVO APPLICARE L'OPERAZIONE

$\vec{w} + \lambda \vec{v}$ DOVE $\vec{w}$ È IL VETTORE CHE TRASLA E $\vec{v}$ È IL VETTORE DIREZIONALE

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq (0,0,0)$

es. $v = (1,1)$, $w = (2,0)$

$\vec{w} + \lambda \vec{v} = (2,0) + 1 \cdot (1,1) = (2,0) + (1,1) = (3,1)$



UN VETTORE $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ DEFINISCE UNA TRASLAZIONE DELLO SPAZIO (SE IN $\mathbb{R}^3$) CHE TRASFORMA IL PUNTO A NEL PUNTO B.

$\vec{v} = B - A$

PARAMETRIZZAZIONE VETTORIALE
DETERMINARE I PUNTI IN $\mathbb{R}^3$ DELLA RETTA CHE PASSA PER $a = (1,0,1)$ e $b = (2,2,1)$

SONO I PUNTI DELLA FORMA: $\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$

$= (1,0,1) + \lambda[(2,2,1) - (1,0,1)]$

$= (1,0,1) + \lambda(1,2,0) = (1+\lambda, 2\lambda, 1)$

PARAMETRIZZAZIONE DELLA RETTA: $\vec{w} + \lambda \vec{v}$

PARAMETRIZZAZIONE DEL PIANO: $\vec{v} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$

EQUAZIONE DI UNA RETTA IN UNO SPAZIO ($\mathbb{R}^3$)

la RETTA NELLO SPAZIO è L'INTERSEZIONE DI DUE PIANI CHE SI INTERSECANO

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) \text{ SONO LE COORDINATE DELLA RETTA.}$$

DOVE $ax + by + cz = d$ è L'EQUAZIONE DEL PIANO IN $\mathbb{R}^3$

es. $u = (1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (0, 1, -1)$ $\Rightarrow$ PER 3 PUNTI NON ALLINEATI PASSA UN PIANO

PIANO $= \vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{2} \\ \lambda = y - \mu \\ \lambda = z - 1 + \mu \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} = y - \mu \\ \frac{x-1}{2} = z + \mu - 1 \end{cases}$$

↓ eq PARAMETRICHE

$$\begin{cases} \mu = y - \frac{x-1}{2} \\ \mu = 1 - z + \frac{x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{x-1}{2} = 1 + \frac{x-1}{2} - z$$

$$y = x - 1 + 1 - z$$

$$y = x - z$$

PRODOTTO SCALARE, VETTORI IN $\mathbb{R}^3$

$v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}$

Def: SI DEFINISCE PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI UNA TRASFORMAZIONE

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \cdot \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 \in \mathbb{R}$$

PROPRIETÀ:

1) $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$

2) $\langle \lambda\vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

3) $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$

4) QUANDO $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$: LE COORDINATE DI V SONO $= \emptyset$ O QUANDO $\vec{v}$ è IL VETTORE NULLO

Def: DUE VETTORI $\vec{v}$ e $\vec{w}$ SONO ORTOGONALI SE $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

UN PIANO π IN $\mathbb{R}^3$ è DATO DA UN VETTORE ORTOGONALE $\vec{a}$ e DA UN PUNTO $W \in \pi$

es. $P = (x, y, z)$, $a = (a, b, c)$

P PER STARE SUL PIANO π : IL VETTORE DA P A W (PUNTO DEL PIANO) DEVE ESSERE ORTOGONALE A $\vec{a}$ cioè

$$\langle \overrightarrow{P - W}, \vec{a} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle P, a \rangle = ax + by + cz \ , \ \langle W, a \rangle = d \Rightarrow ax + by + cz - d = 0$$