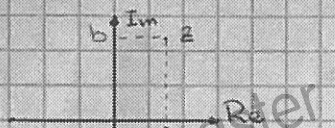
NUMERI COMPLESSI

L'insieme dei numeri complessi è per definizione

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{dove } i^2 = -1$$

COORDINATE CARTESIANE

I numeri complessi $\mathbb{C}$ possono essere rappresentati sul PIANO di GAUSS



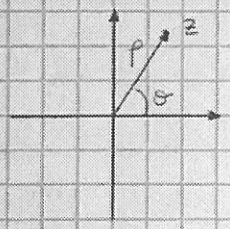
$$\mathbb{C} \ni z = a+ib$$

$Re(z) = a$ Parte Reale

$Im(z) = b$ Parte Immaginaria

COORDINATE POLARI

La rappresentazione di numeri complessi $\mathbb{C}$ coinvolge un valore ρ equivalente alla distanza del punto da O, e l'angolo θ che ρ forma con le asasse



$$\mathbb{C} \ni z = \rho e^{i\theta} \quad \text{con } \rho \geq 0,\ \rho \in \mathbb{R},\ \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \rho e^{i\theta} = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$

$\rho = |z|$ viene detto "modulo di z"

$\theta = \arg(z)$ viene detto "argomento di z"

PROPRIETA' CONIUGATA

Ogni numero complesso z è associato ad un altro numero complesso detto "coniugato" $\overline{z}$ o z^* che vale

$$z = a+ib \qquad \overline{z} = z^* = a-ib \qquad z, \overline{z} \in \mathbb{C}$$

Osservazione

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Modulo e Argomento

$$|\overline{z}| = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho \qquad \overline{\theta} = -\theta \Rightarrow \overline{z} = \rho e^{-i\theta} = \rho\cos(\theta) - i\rho\sin(\theta)$$

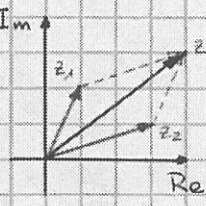
SOMMA DI NUMERI COMPLESSI

$$z_1 = a+ib \qquad z_2 = c+id \Rightarrow z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$$

Sul grafico vale la regola del Parallelogramma

$a+ib \to (a,b) = z_1$

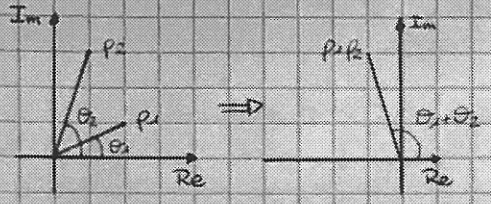
$c+id \to (c,d) = z_2$



PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ $\quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ $\quad z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Sul grafico



master copy copisteria

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio a coefficienti complessi, di grado positivo, ha tante radici complesse quanto è il grado del polinomio

master copy

- Esempio 1

$f(x) = (3-i2)x^3 - 3ix + \sqrt{17}$

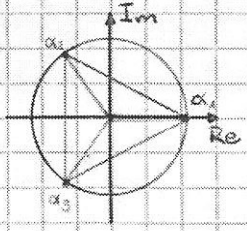
Il teorema dice che esiste almeno un $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $f(\alpha)=0$, e di sono esattamente 3

- Esempio 2

$x^n = a \neq 0 \quad a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Cerchiamo $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $\beta^n = a$

Scrivo $a = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \beta = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{i\theta}{n}}$ ma θ si ripete ogni 2π perciò

$\beta = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\theta_i\right)}$



dove · k/n definisce il numero di soluzioni
· $2\pi\theta$ individua angoli diversi ma coincidenti ogni giro

Dove $a_3 = \bar{a_2}$

Osservazione
per $f(x) \neq 0$ con $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $a \in \mathbb{C}$
se $f(a)=0$ allora esiste $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ t.c. $f(x) = (x-a)g(x)$

infatti facendo la divisione di $f(x)$ per $(x-a)$ troviamo $f(x) = (x-a)q(x) + r(x)$
con $\deg r(x) < \deg(x-a)$. Ma se $f(a)=0$ allora $f(a) = (a-a)q(a) + r(a) = r(a) = 0$

Osservazione
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \qquad \overline{f(x)} = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1}x^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 x + \bar{a}_0$
se $f(a)=0 \Rightarrow \overline{f(a)} = 0$. Ma se $f(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f(\bar{a}) = 0$

$f(x) = (x-a)(x-\bar{a})\,g(x)$

$(x^2 - (a+\bar{a})x + a\bar{a})\,g(x)$

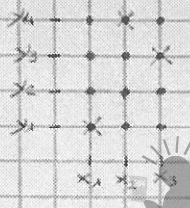
$(x^2 - 2\mathrm{Re}(a)x + |a|^2)\,g(x)$

FUNZIONI

30/09/21

Siano X, Y insiemi. Il loro prodotto cartesiano è definito come
$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$

Una funzione è un sottoinsieme di $X \times Y$ tale che $\forall x \in X$ esiste ed è unico $y \in Y$ tale che $(x,y) \in f$
$f: X \to Y$ ["funzione da X a Y"]



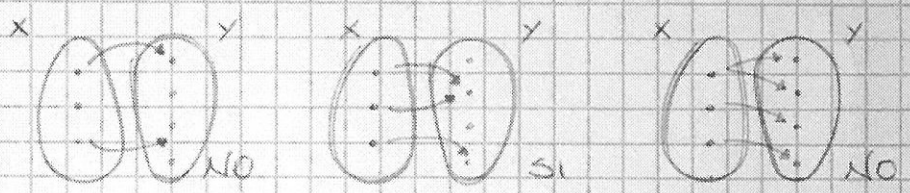
• $X \times Y$
× $f: X \to Y$

Una funzione è una legge che ad ogni elemento di X associa un solo elemento di Y
[per ogni x esiste una sola y]

Per indicare una funzione usiamo
$f: X \to Y$ $\quad f: x \mapsto y$ $\quad (x,y) \in f$ $\quad f(x) = y$

Ogni funzione deve essere definita da
① Dominio X
② Codominio Y
③ Legge matematica

Rappresentazione con Diagrammi



Solamente il diagramma centrale rappresenta una funzione

• Esempi
X = studenti presenti
1) $Y = \mathbb{N}$ $\quad f(x)$ = numero di scarpe ✓
è una funzione perché tutti hanno un numero di scarpe
2) Y = Colori $\quad f(x)$ = colore vestiario ✗
non è una funzione perché non tutti vestono monocromo
3) $Y = \mathbb{N}$ $\quad f(x)$ = n° bottoni camicia ✗
non è una funzione perché non tutti portano la camicia

INIETTIVITÀ

Una funzione $f: X \to Y$ si dice iniettiva se
• $\forall y \in Y$ esiste al più un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
• Se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
• Se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

SURGETTIVITÀ

Una funzione $f: X \to Y$ si dice surgettiva se
• $\forall y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
• $\mathrm{Im}(f) = f(X) = Y$

• Esempi
$f(n) = n^2$ è iniettiva o surgettiva?
!! Questa domanda non ha senso se non conosciamo Dominio e Codominio

	iniettiva	surgettiva
1) $X = Y = \mathbb{N}$	✓	✗
2) $X = Y = \mathbb{Z}$	✗	✓
3) $X = Y = \{0,1\}$	✓	✓

$f = id_{\{0,1\}}$

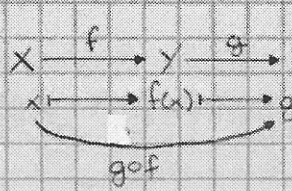
[$id_X : X \to X$, $id_X(x) = x$]

BIGETTIVITÀ

Una funzione $f: X \to Y$ è definita bigettiva se è iniettiva e surgettiva

COMPOSIZIONI

Date le funzioni $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ chiamo composizione "g composto f" $g \circ f: X \to Z$ la funzione data da $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Ha senso fare una composizione solamente se il Codominio di f è uguale al Dominio di g

- Esempio

$X = Y = Z = \mathbb{N}$ $\quad f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 4x^2$

Notiamo che $f \circ g \neq g \circ f$ PER DOMINIO E CODOMINIO SCELTI!!!

INVERTIBILITÀ

Una funzione $f: X \to Y$ si definisce invertibile se esiste $g: Y \to X$ tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$

g viene detta inversa di f, e indicata con f^{-1}.
Se f^{-1} esiste allora è unica

Dimostrazione

- Obiettivo → trovare che se ho $g_1, g_2: Y \to X$ tali che $\{f \circ g_1 = f \circ g_2 = id_Y\}$ e $\{g_1 \circ f = g_2 \circ f = id_X\} \Rightarrow g_1 = g_2$

  Visto che $f \circ g_1 = f \circ g_2 = id_Y \Rightarrow f(g_1(y)) = f(g_2(y)) = y$
  f è iniettiva perché se $f(x_1) = f(x_2)$ ho che $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
  Se f è iniettiva allora $g_1(y) = g_2(y)$
  Perciò la funzione inversa è unica

Proposizione: f è invertibile $\iff$ è bigettiva

Questa proposizione può essere analizzata come l'unione di

① f è iniettiva $\iff \exists\, g$ t.c. $g \circ f = id_X$ [inversa sinistra]

② f è surgettiva $\iff \exists\, g$ t.c. $f \circ g = id_Y$ [inversa destra]

Dimostrazione

- ① $\Leftarrow$
  f è iniettiva perché se $f(x_1) = f(x_2)$ ho che $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

- ② $\Leftarrow$
  Dato $y \in Y$ ho $f(g(y)) = y$ perciò $y \in Im(f)$

- ① $\Rightarrow$
  Delle due cose una deve essere:
  - $\exists x$ t.c. $f(x) = y$ (x unico) e pongo $g(y) = x$
  - $\nexists x$ t.c. $f(x) = y$ allora scelgo $g(y)$

- ② $\Rightarrow$
  Dato $y \in Y$ $\exists x$ (anche più di uno) t.c. $f(x) = y$. Ne prendo uno a caso e pongo $g(y) = x$

- Esempio 1

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = n+1$ $\quad$ ✓ iniettiva ✗ surgettiva

Inversa Sx $g(n) = \begin{cases} n-1 & n \geq 0 \\ 1517 & n = 0 \end{cases}$

- Esempio 2

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$

Inversa Dx $g(n) = 2n$

$[n]$ = Parte intera di n

OPERAZIONI BINARIE SUGLI INSIEMI (Somma e Prodotto)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Proprietà su $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

① $\exists 0$ t.c. $x+0=x \ \forall x$
② $\forall x \ \exists (-x)$ t.c. $x+(-x)=0$
③ $(x+y)+z = x+(y+z)$
④ $x+y = y+x$
⑤ $\exists 1$ t.c. $1 \cdot x = x \ \forall x$
⑥ $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$
⑦ $x(y \cdot z) = (x \cdot y) z$
⑧ $x \cdot y = y \cdot x$
⑨ $x(y+z) = xy + x \cdot z$

Un insieme su cui sono definite tutte queste proprietà è detto CAMPO

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Chiamiamo insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ nella indeterminata (variabile) t

$$\mathbb{K}[t] = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \ : \ n \in \mathbb{N}, \ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Questa definizione è però impropria perché implica:

- $\frac{1}{2} + 3t + 0t^2 \neq \frac{1}{2} + 3t$
- $\frac{1}{2} + 5t^2 \notin \mathbb{R}[t]$

Soluzione

→ si ammettono inserimenti e cancellazioni di monomi del tipo $0 \cdot t^k$

OPERAZIONI SU POLINOMI (Somma e Prodotto)

- SOMMA

  La scrittura generale sarebbe

  $$(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) + (b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + \dots$$

  Questa scrittura risulta "antipatica" perciò si effettua la conversione

  $$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \quad \text{definendo } a_k = 0 \text{ per } k > n$$

  Adesso possiamo scrivere

  $$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) t^k$$

- PRODOTTO

  Utilizzando la stessa conversione otteniamo

  $$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_n \cdot b_{k-n} \right) t^k$$

L'insieme dei polinomi non è un campo;
infatti tutte le proprietà necessarie sono definite, ma non la ⑥