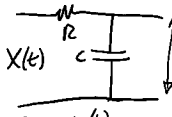
2/03 PREREQUISITI ANALISI e ELETTROTECNICA (FASORI)



$x(t) = V_x \cos(2\pi f_0 t + \theta_x)$ $\quad V_x > 0$

$y(t) = V_y \cos(2\pi f_0 t + \theta_y)$ $\Rightarrow$ L'UNICO PROBLEMA E' DETERMINARE V_y e θ_y

FASORE DI $x(t)$: $X = V_x e^{j\theta_x}$ $\quad |X| = V_x$ $\quad Y = V_y e^{j\theta_y}$ $\quad |Y| = V_y$

$$Y = X \cdot \frac{\frac{1}{j2\pi f_0 C}}{\frac{1}{j2\pi f_0 C} + R} = X \frac{1}{1 + j2\pi f_0 RC} \qquad |Y| = |X| \left| \frac{1}{1 + j2\pi f_0 RC} \right| \Rightarrow |Y| = |X| \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 RC)^2}}$$

$$V_y = \frac{V_x}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 RC)^2}} \qquad \theta_y = \theta_x - \operatorname{arctg}(2\pi f_0 RC) \Rightarrow y(t) = \frac{V_x}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 RC)^2}} \cos\left(2\pi f_0 t + \theta_x - \operatorname{arctg}(2\pi f_0 RC)\right)$$

$z_1 = x_1 + jy_1$
$z_2 = x_2 + jy_2$

$$Re\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} \begin{cases} = \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}} \cos(\theta_1 - \theta_2) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cos\left(\angle \frac{z_1}{z_2}\right) \\ = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \end{cases}$$

$$Re\{z_1 z_2\} = x_1 x_2 - y_1 y_2 = Re\{z_1\} \cdot Re\{z_2\} - Im\{z_1\} \cdot Im\{z_2\}$$

$$Im\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \begin{cases} \sqrt{\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}} \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$$

master COPY

SEGNALE = QUALSIASI GRANDEZZA FISICA VARIABILE IN UN QUALCHE DOMINIO (TEMPORALE, SPAZIALE, ecc) A CUI E' ASSOCIATA UNA QUALCHE INFORMAZIONE DI INTERESSE. E' UNA FUNZIONE MATEMATICA DI UNA O PIÙ VARIABILI

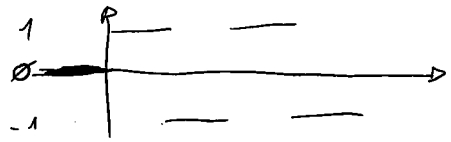
ES
TERMETRO: GRANDEZZA FISICA E' LA TEMPERATURA ; DOMINIO TEMPORALE ; INFORMAZIONE ASSOCIATA ALLA GRANDEZZA FISICA, E' LO STATO TERMICO

NOI CI OCCUPEREMO DI SEGNALI MONODIMENSIONALI → $x(t)$, $y(t)$, ...

CLASSIFICAZIONI DEI SEGNALI



- DOMINIO (CIOE' IN BASE AI VALORI ASSUNTI DALLA VARIABILE INDIPENDENTE)
  1. SEGNALI TEMPO-CONTINUI → QUELLI IN CUI LA VARIABILE HA CARDINALITA' $\in \mathbb{R}$
  2. SEGNALI TEMPO-DISCRETI → SEGNALI IN CUI IL DOMINIO E' COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI PUNTI OPPURE UN INSIEME CON INFINITI PUNTI MA NUMERABILI (es: LE SUCCESSIONI)
- CODOMINIO (CIOE' SULLA BASE DEI VALORI ASSUNTI DAI SEGNALI)
  1. SEGNALI AD AMPIEZZA CONTINUA → SI HANNO QUANDO IL CODOMINIO HA CARDINALITÀ $\in \mathbb{R}$
  2. SEGNALI AD AMPIEZZA DISCRETA → QUANDO IL CODOMINIO HA CARDINALITA' NUMERABILE



3 VALORI

master COPY

UN SEGNALE SI DICE ANALOGICO QUANDO SIAMO IN PRESENZA DI SEGNALE A TEMPO CONTINUO E AD AMPIEZZA CONTINUA
UN SEGNALE A TEMPO ED AD AMPIEZZA DISCRETI SI DICE DIGITALE o NUMERICO
SEGNALI A TEMPO DISCRETO E AD AMPIEZZA CONTINUA SONO SEQUENZE A VALORI REALI
SEGNALI A TEMPO CONTINUO E AD AMPIEZZA DISCRETA SI DICONO QUANTIZZATI

QUANDO IL VALORE DI UN SEGNALE SIA UNIVOCAMENTE DETERMINABILE NON APPENA SIANO FISSATI I VALORI DELLE VARIABILI INDIPENDENTI (TEMPO), VIENE CHIAMATO SEGNALE DETERMINISTICO

SPESSO NON E' POSSIBILE CONOSCERE CON ESATTEZZA A PRIORI IL VALORE ASSUNTO DA UN SEGNALE IN UN CERTO ISTANTE. QUESTI SEGNALI SI DICONO ALEATORI, INTENDENDO CHE IL VALORE ASSUNTO E' AFFETTO DA UN CERTO GRADO DI IMPONDERABILITA' CHE NE IMPEDISCE LA CONOSCENZA ESATTA.

6/03

CLASSIFICAZIONE DEI SEGNALI { PERIODICI / APERIODICI

PUNTO CHIAVE

- UN SEGNALE $x(t)$ SI DICE <u>PERIODICO</u> CON PERIODO T_0 SE VALE $x(t) = x(t+T_0)$ $\forall t$

IL PERIODO NON E' UNICO

SE CHIAMO $t' = t+T_0 \rightarrow x(t') = x(t'+T_0) \rightarrow x(t) = x(t+T_0+T_0) = x(t+2T_0)$ $\forall t$ $\quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow x(t) = x(t+nT_0)$ $\forall t$ CONVENZIONALMENTE IL <u>PERIODO</u> E' IL PIÙ PICCOLO T_0 POSITIVO CHE SODDISFA LA RELAZIONE

- SE IL SEGNALE $x(t)$ E' "COSTANTE" $\Rightarrow$ $x(t)$ E' PERIODICO CON PERIODO QUALSIASI

- SE $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta) \rightarrow$ DEVO TROVARE UN NUMERO REALE T_0 t.c.:

$\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \cos[2\pi f_0 (t+T_0) + \theta]$ CIOÈ $x(t) = x(t+T_0)$ NOI VOGLIAMO CHE $2\pi f_0 t + \theta = 2\pi f_0 t + \theta + 2\pi f_0 T_0$

$2\pi f_0 T_0 = 2\pi n \Rightarrow T_0 = \frac{n}{f_0} \rightarrow$ DEVO PRENDERE IL PIÙ PICCOLO $n \Rightarrow n=1 \Rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0}$

- UN SEGNALE <u>APERIODICO</u> E' UN SEGNALE CHE NON E' PERIODICO, CIOÈ PER QUEL SEGNALE NON E' POSSIBILE TROVARE ALCUN T_0 TALE PER CUI VALE $x(t) = x(t+T_0)$ $\forall t$

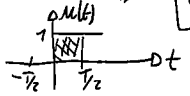
CAUSALITÀ DI UN SEGNALE = UN SEGNALE $x(t)$ E' CAUSALE QUANDO $x(t) = 0$ PER $t \leq 0$

L'UNICA FUNZIONE CAUSALE PERIODICA E' LA FUNZIONE NULLA $\Rightarrow x(t) = 0$ $\forall t$

CARATTERISTICHE DI UN SEGNALE

- VALOR MEDIO DI UN SEGNALE SU UN INTERVALLO TEMPORALE $\Rightarrow \eta_x = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt \Rightarrow$ $\boxed{\eta_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt}$

ES: $x(t) = \text{GRADINO } u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$ $\quad \eta_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,dt \Rightarrow$ FISSIAMO $\frac{T}{2}$ e $-\frac{T}{2}$



$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2} = \eta_x$

SE ABBIAMO UN SEGNALE PERIODICO $x(t) = x(t+T_0)$ $\forall t \Rightarrow \left[\eta_x = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)\,dt\right]$ $\rightarrow$ INTERVALLO T_0 CIOÈ $\frac{1}{T_0}\int_{a}^{a+T_0} x(t)\,dt$

OTTENGO LO STESSO RISULTATO $\forall a$ SE L'INTERVALLO E' DI AMPIEZZA COME IL PERIODO

- POTENZA ISTANTANEA DI UN SEGNALE

SI DEFINISCE LA POTENZA ISTANTANEA DI UN SEGNALE $x(t) \Rightarrow \boxed{x^2(t)}$

- L'ENERGIA SU UN INTERVALLO $\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt \Rightarrow \boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt}$ SE E' CONVERGENTE RESTITUISCE UN VALORE FINITO $\Rightarrow x(t)$ E' AD ENERGIA FINITA

PER I SEGNALI PERIODICI $\rightarrow$ L'INTEGRALE DIVERGE. RESTITUIREBBERO UN VALORE FINITO SE PRENDO UN INTERVALLO LIMITATO $\Rightarrow$ ENERGIA INFINITA

- IN PRESENZA DI ENERGIA INFINITA, SI DEFINISCE LA POTENZA MEDIA $\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt}$ (NELLA REALTÀ TUTTI I SEGNALI SONO A ENERGIA FINITA)

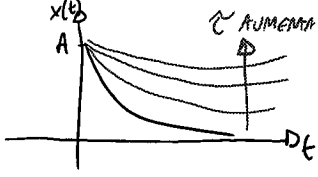
NON E' DETTO CHE UN SEGNALE CON ENERGIA INFINITA ABBIA POTENZA FINITA (es: $x(t) = t$)

NEL CASO DI SEGNALI PERIODICI $\Rightarrow \left[P_x = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x^2(t)\,dt\right]$ PER SEGNALI COMPLESSI $\rightarrow |x(t)|^2$

OSS LA POTENZA MEDIA, PER UN SEGNALE AD ENERGIA FINITA, E' NULLA

OSS $\quad R$ { $x(t) = v(t) \Rightarrow$ POT. ISTANTANEA $= \frac{x^2(t)}{R}$; $x(t) = i(t) \Rightarrow$ POT. ISTANTANEA $= R\,x^2(t)$ } LA POTENZA ISTANTANEA $\propto x^2(t)$

EXE ESPONENZIALE MONOLATERO $x(t) = A e^{-t/\tau} u(t)$ $\quad A>0$, $\tau>0 \Rightarrow$ SEGNALE APERIODICO CAUSALE. CALCOLARE { E_x, P_x, η_x



τ AUMENTA $\quad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-2t/\tau}\,dt = \left[\frac{-\tau A^2}{2} e^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau}{2}A^2$

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(A e^{-t/\tau}\right)^2 dt = 0$

$\eta_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A e^{-t/\tau} u(t)\,dt$

$\eta_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-A\tau e^{-t/\tau}\right]_0^{T/2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[-A\tau e^{-\frac{T}{2\tau}} + A\tau\right] = 0$

E' GIUSTO CHE E_x SIA PROPORZIONALE A τ

OSS NON È UN CASO CHE $\eta_x = 0$, POICHÉ VALE ∀ SEGNALE CON ENERGIA FINITA

DIM $x(t)$ A E_x FINITA $\Rightarrow P_x = 0$, IPOTIZZIAMO CHE η_x SIA IL SUO VALOR MEDIO

$y(t) = x(t) - \eta_x$ E CALCOLIAMO LA POTENZA $P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)\,dt$ $\qquad y^2(t) = x^2(t) - 2\eta_x x(t) + \eta_x^2$

$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt - \frac{2\eta_x}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt + \frac{\eta_x^2 T}{T} \Rightarrow P_y = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt - 2\eta_x \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt + \eta_x^2 \Rightarrow P_y = -\eta_x^2$

($\frac{1}{T}\int x^2(t)\,dt$: $P_x = \emptyset$; $\frac{1}{T}\int x(t)\,dt$: $\to \eta_x$)

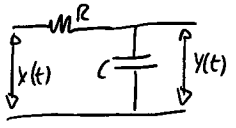
MA LA POTENZA DEVE ESSERE $\geq 0 \Rightarrow$ L'UNICA SOLUZIONE È $\boxed{\eta_x = 0}$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ $\Rightarrow \left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$ SI PUÒ USARE COME ALTRA DIMOSTRAZIONE

ARGOMENTI TRATTATI DEL CORSO
1. ANALISI DI FOURIER DEI SEGNALI PERIODICI
2. ANALISI DI FOURIER DI SEGNALI APERIODICI
3. SISTEMI MONODIMENSIONALI TEMPO-CONTINUI (SISTEMI LINEARI, STAZIONARI)
4. CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE DI SEGNALI TEMPO-CONTINUI

master copy

ANALISI DI FOURIER DI SEGNALI PERIODICI



$x(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$ $\qquad y(t)?$

SICCOME IL SISTEMA È LINEARE, POSSIAMO USARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$x'(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \Rightarrow y'(t) = A_1\left|\frac{1}{1+j2\pi f_1 RC}\right|\cos\left(2\pi f_1 t + \theta_1 - \arctg(2\pi f_1 RC)\right) \to \dot{y}' = A_1 e^{j\theta_1} H(f_1)$ CON $H(f_1) = \frac{1}{1+j2\pi f_1 RC}$

$x''(t) = A_2\cos(2\pi f_2 t + \theta_2) \Rightarrow y''(t) = A_2\left|\frac{1}{1+j2\pi f_2 RC}\right|\cos\left(2\pi f_2 t + \theta_2 - \arctg(2\pi f_2 RC)\right) \to \dot{y}'' = A_2 e^{j\theta_2} H(f_2)$ CON $H(f_2) = \frac{1}{1+j2\pi f_2 RC}$

$y(t) = y'(t) + y''(t)$

[LE SINUSOIDI SONO AUTOFUNZIONI, CIOÈ, PER UN SISTEMA LINEARE STAZIONARIO, SE IN INGRESSO HO UNA PULSAZIONE, ALL'USCITA HO LA STESSA PULSAZIONE]

$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k\cos(2\pi f_k t + \theta_k) \Rightarrow y(t) = \sum_{k=1}^{N} B_k\cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$

[L'ANALISI DI FOURIER È LA RAPPRESENTAZIONE DI UN SEGNALE $x(t)$ CON LA COMBINAZIONE DI FUNZIONI SINUSOIDALI, SOTTO DETERMINATE CONDIZIONI, CHE HANNO IL VANTAGGIO DI ESSERE AUTOFUNZIONI]

[$x(t)$ È PERIODICO SE E SOLO SE $\frac{f_1}{f_2}$ È UN NUMERO RAZIONALE, CIOÈ SE I DUE PERIODI STANNO IN UN RAPPORTO RAZIONALE]

(ES: SE $f_2 = 2\pi f_1 \to$ NON È PERIODICO; SE $f_2 = \frac{3}{5}f_1$ INVECE SÌ)

ANALISI DI FOURIER DI SEGNALI PERIODICI

$x(t) = x(t+T_0)\ \forall t$ $\xrightarrow{\text{VOGLIO APPROSSIMARE}}$ $x(t) = A_K\cos(2\pi f_K t + \theta_K) \Rightarrow x(t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k\cos(2\pi f_k t + \theta_k)$

CIOÈ: HO UN SEGNALE PERIODICO DI PERIODO T_0 E LO VOGLIO APPROSSIMARE CON UNA COMBINAZIONE LINEARE, QUINDI CERCHERÒ DI FARE IN MODO CHE IL SEGNALE CHE OTTENGO SIA ANCH'ESSO DI PERIODO T_0

SE PRENDO $f_0 = 1/T_0$ SONO SICURO CHE L'OSCILLAZIONE f_0 HA PERIODO T_0, MA CI SONO ALTRE OSCILLAZIONI A PERIODO T_0 ANCHE SE PER QUESTE OSCILLAZIONI IL PERIODO NON CORRISPONDE AL MINIMO INTERVALLO TEMPORALE PER IL QUALE LA PERIODICITÀ È VERIFICATA

QUINDI PRENDO $f_K = Kf_0 \to$ IL PERIODO $T_K = \frac{1}{f_K} = \frac{1}{Kf_0} = \frac{T_0}{K}$ MA È ANCHE PERIODICO DI PERIODO T_0

$\Rightarrow$ SE CONSIDERO UNA COMBINAZIONE LINEARE DI OSCILLAZIONI LE CUI FREQUENZE SONO MULTIPLE INTERE DI f_0 (DELL'INVERSO DEL PERIODO $x(t)$), SI TROVANO TUTTE LE OSCILLAZIONI PERIODICHE DI PERIODO T_0, LA LORO COMBINAZIONE LINEARE È UN SEGNALE DI PERIODO T_0

QUINDI NELL'APPROSSIMARE UN GENERICO SEGNALE PERIODICO CON COMBINAZIONE LINEARE, LO FACCIO CONSIDERANDO FREQUENZE MULTIPLE INTERE DELL'INVERSO DEL PERIODO T_0

f_0 = FREQUENZA FONDAMENTALE $\to f_K = Kf_0$ = FREQUENZE ARMONICHE $\Rightarrow \boxed{x(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{\infty} A_K\cos(2\pi K f_0 t + \theta_K)}$

13/03 SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

$x(t) = x(t+T_0)\ \forall t$ $\qquad x(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{N} A_K\cos(2\pi f_K t + \theta_K)$

$\Rightarrow x(t) = A_0 + \sum_{K=1}^{N} A_K\cos(2\pi K f_0 t + \theta_K)$ $\qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$

SE SCEGLIAMO GLI f_K MULTIPLI INTERI DI f_0, OTTENIAMO DELLE OSCILLAZIONI CHE HANNO PERIODO SOTTOMULTIPLO DI T_0 E QUINDI SONO ANCHE PERIODICHE DI PERIODO T_0

SI USANO I SEGNALI SINUSOIDALI PERCHÉ SONO AUTOFUNZIONI PER SISTEMI STAZIONARI LINEARI

- ADESSO BISOGNA FISSARE GLI A_k e i θ_k SECONDO UN CRITERIO IN MODO CHE SIA PIÙ POSSIBILE SIMILE AD $x(t)$
MA CI VUOLE QUALCOSA CHE MISURI LA BONTÀ DELL'APPROSSIMAZIONE
- UN CRITERIO È QUELLO DI CERCARE GLI A_K E I θ_K IN MODO TALE DA LIMITARE LA MASSIMA DIFFERENZA (IN MODULO) TRA $x(t)$ E IL SEGNALE CHE LO APPROSSIMA
- UN ALTRO CRITERIO È QUELLO DI MINIMIZZARE LA POTENZA DEL SEGNALE ERRORE: $x(t) - \left[A_0 + \sum_{K=1}^{\infty} A_K \cos\left(2\pi k f_0 t + \theta_K\right)\right] = e(t)$

SICCOME $e(t)$ È PERIODICO DI PERIODO T_0, LA POTENZA DELL'ERRORE $\Rightarrow \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} e(t)^2 dt$
MA È PIÙ FACILE LAVORARE CON ESPONENZIALI COMPLESSI

$e^{j2\pi k f_0 t} = \cos(2\pi k f_0 t) + j\sin(2\pi k f_0 t)$ QUINDI CONSIDEREREMO COME SEGNALE APPROSSIMANTE FATTO IN QUESTO MODO: $\boxed{\sum_{K=-N}^{N} X_K e^{j2\pi k f_0 t} = S_N(t)}$ SERIE DI FOURIER IN FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA

GLI X_K SONO IN GENERALE DEI NUMERI COMPLESSI E SONO LEGATI AGLI A_K E θ_K

$\Rightarrow e(t) = x(t) - S_N(t) \Rightarrow$ COME SI SCELGONO GLI X_K T.C. MINIMIZZI $\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} |x(t) - S_N(t)|^2 dt$ (MODULO PERCHÉ CONSIDERO REE{n° COMPLESSI})

SE $x(t)$ È UN SEGNALE A QUADRATO SOMMABILE (CIOÈ $\int_{\text{PERIODO}} x^2(t)dt$ ESISTE E FINITO) ALLORA LA SCELTA OTTIMA DEI COEFFICIENTI X_K SONO:

$\boxed{X_K = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}$ EQUAZIONE DI ANALISI (SE NON SI PRENDONO COSÌ LA POTENZA DI $e(t)$ NON È MINIMIZZATA)

CI ASPETTIAMO CHE AUMENTANDO N LE COSE MIGLIORINO $\Rightarrow$ DIMINUISCE LA POTENZA DI $e(t)$

$\lim_{N\to\infty} \int_{[T_0]} |x(t) - S_N(t)|^2 dt = 0$ QUESTO NON VUOL DIRE CHE IL SEGNALE ERRORE TENDE A 0 $\forall t \to x(t) - S_N(t') \neq 0$ (IN GENERALE)

CI SONO DELLE CONDIZIONI PER CUI SI HA CONVERGENZA PUNTUALE ($\lim_{N\to\infty} S_N(t) = x(t)$)

MA IN GENERALE $\lim_{N\to\infty} \int_{[T_0]} |x(t) - S_N(t)|^2 dt = 0 \not\Leftarrow \lim_{N\to\infty} S_N(t) = x(t)$

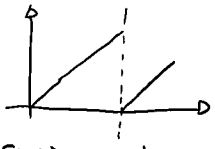
L'ESISTENZA DI X_K È GARANTITA DALL'INTEGRABILITÀ DI $x(t)$

$\boxed{\lim_{K\to\infty} X_K = 0}$ RISULTATO TEORICO, MA IMPORTANTE DAL PUNTO DI VISTA PRATICO PERCHÉ NON POSSO PRENDERE INFINITI N PER CALCOLARE LA POTENZA DELL'ERRORE, QUINDI DA UN CERTO N IN POI POSSO TRONCARE LA SERIE S_N E RENDERE PICCOLA A PIACERE LA POTENZA DELL'ERRORE (PERCHÉ GLI X_K SONO SEMPRE PIÙ PICCOLI)

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA CONVERGENZA PUNTUALE (CONDIZIONI SULLA REGOLARITÀ DI $x(t)$)

DEF.
- UNA FUNZIONE SI DICE CONTINUA IN UN INTERVALLO QUANDO SU QUESTO INTERVALLO È CONTINUA QUASI DAPPERTUTTO, CIOÈ AD ECCEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI PUNTI DOVE AMMETTE DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE (QUANDO IL LIM DESTRO E SINISTRO IN UN PUNTO SONO DIVERSI MA FINITI)

ES:



- UNA FUNZIONE È REGOLARE A TRATTI IN UN INTERVALLO, SE GENERALMENTE CONTINUA E LO È PURE LA SUA DERIVATA

➡ LA SERIE DI FOURIER (S_N) È UNA FUNZIONE REGOLARE A TRATTI E CONVERGE A $x(t)$ IN TUTTI I PUNTI IN CUI $x(t)$ È CONTINUA
NEI PUNTI DOVE $x(t)$ È DISCONTINUA $\to S_N$ CONVERGE ALLA SEMISOMMA DEL LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

➡ SE $x(t)$ È REGOLARE A TRATTI E ANCHE CONTINUA (COSÌ LA $x'(t)$ PUÒ AVERE DISCONTINUITÀ DI I° SPECIE) (ES: $|x|$) $\Rightarrow$ LA CONVERGENZA DELLA SERIE A $x(t)$ SI HA PER OGNI t ED È UNIFORME (FISSO $\varepsilon>0$, $\exists \bar{N}$ T.C. $\forall N > \bar{N}$ SI HA $|x(t) - S_N(t)| < \varepsilon$)
IN GENERALE $\bar{N}$ CAMBIA SE CAMBIO ISTANTE TEMPORALE
SE INVECE È UNIFORME $\to$ FISSO $\varepsilon>0$, $\exists \bar{N}$ T.C. $\forall N > \bar{N}$ SI HA $|x(t) - S_N(t)| < \varepsilon$ $\forall t$

$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} X_K e^{j2\pi k f_0 t} = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} X_K e^{j2\pi k f_0 t}$ IN REALTÀ NON È PROPRIO UGUALE, MA LO È SOLO DOVE C'È CONVERGENZA PUNTUALE

PROPRIETÀ FONDAMENTALE DEGLI X_K CON $x(t)$ REALE = GODONO DI SIMMETRIA HERMITIANA $\Rightarrow \boxed{X_K = X_{-K}^*}$

DIMI $X_{-K} = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t) e^{+j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} \left[x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\right]^* dt = \left[\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x^*(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt\right]^*$ MA SICCOME $x(t)$ È REALE $\Rightarrow x^*(t) = x(t)$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt\right]^* = X_K^* \implies X_K = X_{-K}^*$

master COPY

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t}+X_0+\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}=\sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t}+X_0+\sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

(IPOTESI: $x(t)$ REALE) $\Rightarrow X_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(X_k e^{j2\pi f_0 t}+\underbrace{X_{-k}}_{\text{COMPLESSI CONIUGATI}} e^{-j2\pi k f_0 t}\right)=X_0+2\sum_{k=1}^{\infty} Re\left\{X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right\}$ $\Rightarrow$ SI OTTENGONO DUE FORME PER LA SERIE DI FOURIER (POLARE O RETTANGOLARE)

VALOR MEDIO DEL SEGNALE $= A_0$ ($e^{\wedge}$ REALE) (PUÒ ESSERE <0 MENTRE GLI $A_k>0$)

- X_k IN FORMA POLARE: $|X_k|=A_k$, $\angle X_k=\theta_k$ $\Rightarrow X_k=A_k e^{j\theta_k} \Rightarrow Re\left\{A_k e^{j\theta_k}\cdot e^{j2\pi k f_0 t}\right\}=Re\left\{A_k e^{j(2\pi k f_0 t+\theta_k)}\right\}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=A_0+2\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(2\pi k f_0 t+\theta_k)}$$ FORMA REALE POLARE DELLA SERIE DI FOURIER

- X_k IN FORMA RETTANGOLARE: $X_k=a_k+jb_k$ $\Rightarrow Re\left\{(a_k+jb_k)e^{j2\pi k f_0 t}\right\}=a_k\cdot\cos(2\pi k f_0 t)-b_k\,sen(2\pi k f_0 t)$ $\left(\begin{matrix}Re\{a\cdot b\}=\\ Re\{a\}\cdot Re\{b\}-Im\{a\}Im\{b\}\end{matrix}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=\underbrace{a_0}_{A_0}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(2\pi k f_0 t)-b_k\,sen(2\pi k f_0 t)\right]}$$ FORMA REALE RETTANGOLARE DELLA SERIE DI FOURIER

(QUESTE DUE FORME VALGONO SOLO PER SEGNALI $x(t)$ REALI)

PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ: $\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} e^{j2\pi(k-m)f_0 t}\,dt=\begin{cases}0 & \text{se } k\neq m\\ 1 & \text{se } k=m\end{cases}$

ESEMPI DI SEGNALI

- SEGNALE COSTANTE $\Rightarrow x(t)=A$ $\quad X_k=\begin{cases}A & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$

- $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$

$$X_k=\begin{cases}0 & k=0\\ \end{cases}$$ $\longrightarrow$ SI VERIFICA CON LA DEFINIZIONE $X_k=\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt=\frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} \underbrace{A\cos(2\pi f_0 t+\theta)}_{\frac{1}{2}e^{j(2\pi f_0 t+\theta)}+\frac{1}{2}e^{-j(2\pi f_0 t+\theta)}} e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$

$$X_k=\frac{A}{2T_0}\int_{[T_0]} e^{j(2\pi f_0 t+\theta)}e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt+\frac{A}{2T_0}\int_{[T_0]} e^{-j(2\pi f_0 t+\theta)}e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$X_k=\frac{A}{2T_0}e^{j\theta}\int_{[T_0]} e^{-j2\pi(k-1)f_0 t}\,dt+\frac{A}{2T_0}e^{-j\theta}\int_{[T_0]} e^{-j2\pi(k+1)f_0 t}\,dt$$

$\begin{cases}k=1 \to \frac{A}{2}e^{j\theta}\\ k=-1\to \frac{A}{2}e^{-j\theta}\end{cases}$ (PROPRIETÀ DI ORTOGONALITÀ) $\Rightarrow \forall k\neq\pm1 \to X_k=0$

$$\Rightarrow X_k=\begin{cases}0 & k=0,\ k\neq\pm1\\ \frac{A}{2}e^{j\theta} & k=1\\ \frac{A}{2}e^{-j\theta} & k=-1\end{cases}$$

[OPPURE LO CONFRONTI CON LA FORMA POLARE]

SI POTEVA VEDERE SUBITO SENZA LA DEFINIZIONE $\Rightarrow x(t)=\frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j2\pi f_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j2\pi f_0 t}$ (RAPPRESENTA LA SERIE DI FOURIER IN FORMA ESPONENZIALE COMPLESSA)

$x_k(t)=\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$ $\Rightarrow$ IL SEGNALE CONTIENE SOLO LA FONDAMENTALE E QUELLA A FREQUENZA $-f_0$ $\Rightarrow$ SEGNALE MONOCROMATICO (CONTIENE UN'UNICA ARMONICA, LA FONDAMENTALE)

$\Rightarrow X_1=\frac{A}{2}e^{j\theta}$; $X_{-1}=\frac{A}{2}e^{-j\theta}$ TUTTI GLI ALTRI X_k SONO NULLI

- $x(t)=A\,sen(2\pi f_0 t+\theta)$

$$X_k=\begin{cases}0 & k=0;\ k\neq\pm1\\ \frac{A}{2}e^{j(\theta-\frac{\pi}{2})} & k=1\\ \frac{A}{2}e^{-j(\theta-\frac{\pi}{2})} & k=-1\end{cases}$$ $\qquad x(t)=\sum_k X_k e^{j2\pi k f_0 t}$

20/03

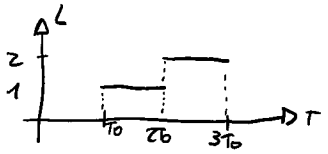
DIMOSTRAZIONE DI $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^{\alpha}(t)\,dt$

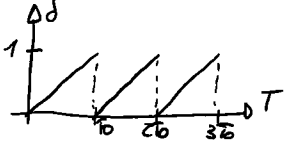
SE LO PENSO T COME UN MULTIPLO INTERO DEL PERIODO PIÙ UNA FRAZIONE DI T_0 $\Rightarrow T=LT_0+\delta T_0$

SAPPIAMO CHE L È LA PARTE INTERA DEL RAPPORTO: $L=\left\lfloor\frac{T}{T_0}\right\rfloor$ (ES: $T=3{,}4T_0 \Rightarrow L=3$ e $\delta=0{,}4$)

QUINDI POSSIAMO ESPRIMERE SEMPRE T COME LA SOMMA DI UNA PARTE INTERA DI T_0 E UNA FRAZIONE DI T_0 ($\delta\in[0,1]$)

GRAFICAMENTE





QUINDI: $\int_{-T/2}^{T/2} x^{\alpha}(t)dt=\int_{-\frac{LT_0}{2}-\frac{\delta T_0}{2}}^{\frac{LT_0}{2}+\frac{\delta T_0}{2}} x^{\alpha}(t)dt$

QUESTO INTEGRALE MI CONVIENE SCRIVERLO COME SOMMA DI 3 INTEGRALI

$$\int_{-\frac{LT_0}{2}-\frac{\delta T_0}{2}}^{-\frac{LT_0}{2}} x^{\alpha}(t)dt+\int_{-\frac{LT_0}{2}}^{LT_0/2} x^{\alpha}(t)\,dt+\int_{\frac{LT_0}{2}}^{\frac{LT_0}{2}+\frac{\delta T_0}{2}} x^{\alpha}(t)\,dt$$

QUALUNQUE SIA IL VALORE DI T, POSSO SCRIVERE L'INTEGRALE IN QUESTA MANIERA