PRODOTTO SCALARE

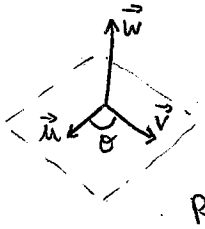


$$\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\cos\theta = \vec{v}^T\vec{u}$$

Proprietà: • $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

• $\lambda\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\lambda\vec{v}$

PRODOTTO VETTORIALE



$$\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{v}$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,\sin\theta$$

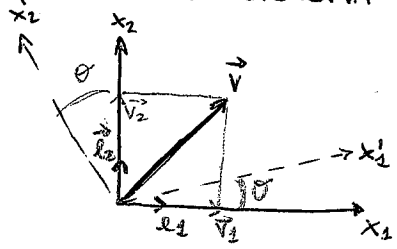
$$\vec{\omega} = \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3$$

Proprietà: • $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$

• $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{q}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}+\vec{q}$

• $\lambda\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\lambda\vec{v}$

VETTORE IN SISTEMA RUOTATO



$\Rightarrow$ perché: $\vec{e}_1 = \cos\theta\,\vec{e}_1' - \sin\theta\,\vec{e}_2'$

$\vec{e}_2 = \vec{e}_1'\sin\theta + \vec{e}_2'\cos\theta$

$$\vec{V}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \end{bmatrix}$$

ovvero: $\vec{V}' = \underline{R}\,\vec{V}$ dove $\underline{R}$ = MATRICE DI ROTAZIONE

In componenti: $V_i = R_{ij}V_j$

Essendo R matrice ortogonale: $\underline{R}\cdot\underline{R}^T = \underline{I} \Rightarrow R^{-1} = R^T$

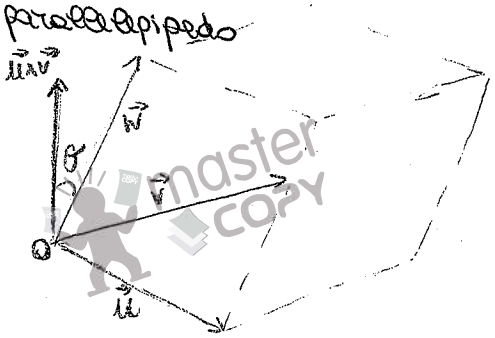
Perciò: $\vec{V} = \underline{R}^{-1}\vec{V}' = \underline{R}^T\vec{V}'$

In componenti: $V_i = R_{ij}^T V_j'$

PRODOTTO MISTO

Ci consente di calcolare il volume del parallelepipedo

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$$



I 3 vettori NON devono essere complanari, perché il prodotto misto si annullerebbe.

NB: va risolto prima il prodotto vettoriale perché non avrebbe senso fare uno scalare $\wedge$ vettore.

TENSORE

È un'applicazione lineare che trasforma un'applicazione nel piano in un vettore, ovvero:

$$\underline{T}\cdot\vec{u} = \vec{v}$$

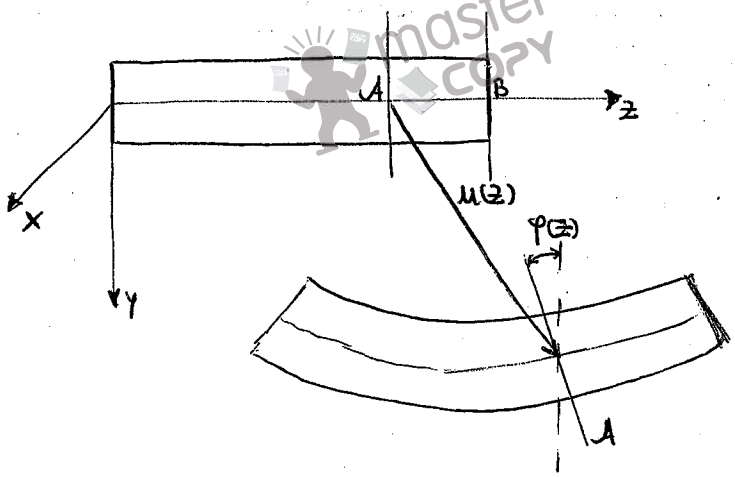
Proprietà: • $\underline{T}(\vec{u}+\vec{v}) = \underline{T}\,\vec{u} + \underline{T}\,\vec{v}$

• $\underline{T}(\lambda\vec{u}) = \lambda\,\underline{T}\,\vec{u}$

Se voglio scrivere l'applicazione in un sistema di riferimento ruotato:

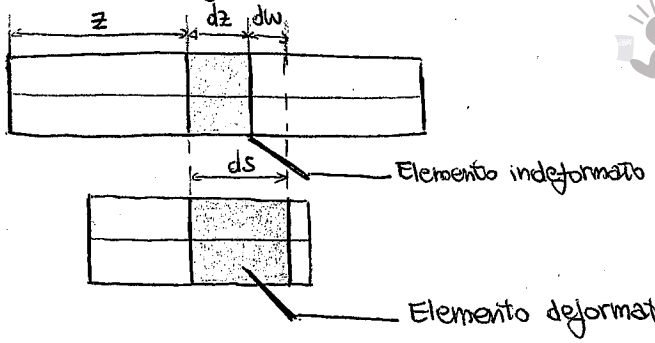
$\vec{v}' = \underline{T}'\,\vec{u}$ dove: $\underline{T}' = \underline{R}\,\underline{T}\,\underline{R}'$

DEFORMAZIONE E SPOSTAMENTO



Nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella deformata le sezioni traslano e ruotano rigidamente: la traslazione è definita dal vettore $\vec{u}$. Si deve definire la rotazione. La generica sezione A, inizialmente verticale, a deformazione avvenuta trasla solidalmente alla linea d'asse e ruota di un angolo φ, dipendente da z, detto ANGOLO DELLA ROTAZIONE della sezione. La rotazione è adimensionale e convenzionalmente positiva se antioraria, dipendente dalla sola z secondo $\varphi(z)$: FUNZIONE CONTINUA e DERIVABILE

Deformazione assiale



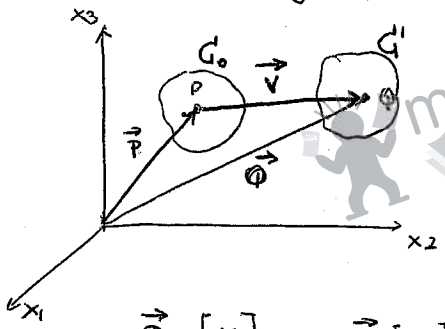
Nella configurazione iniziale il elemento ha lunghezza dz mentre, a deformazione avvenuta, ha lunghezza ds: la differenza $dw = ds - dz$ esprime l'allungamento a livello locale. Si definisce DEFORMAZIONE o DILATAZIONE ASSIALE dell'elemento infinitesimo di trave corrispondente all'ascissa z la

grandezza:

$$\varepsilon(z) = \frac{ds - dz}{dz} = \frac{dw}{dz} = w'(z)$$ DEFORMAZIONE LINEARE

Se $\varepsilon(z) = 0 \ \forall z \in [0, \ell]$ la trave è detta INESTENSIBILE o INDEFORMABILE ASSIALMENTE.

- Considero il seguente sistema:



Una deformazione associa i punti C_0 ai C' attraverso una funzione VETTORIALE $\underline{f}$ BIUNIVOCA, CONTINUA E DERIVABILE

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{Q} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{Q} = \underline{f}(\vec{P})$$

ovvero:

$$\eta_1 = \underline{f}_1(x_1, x_2, x_3)$$
$$\eta_2 = \underline{f}_2(x_1, x_2, x_3)$$
$$\eta_3 = \underline{f}_3(x_1, x_2, x_3)$$

Calcolo il gradiente della funzione $\underline{f}$:

$$\nabla \underline{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\imath}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{\imath}_3$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \nabla \underline{f} \text{ Jacobiano}$$ GRADIENTE DI DEFORMAZIONE

f_1, f_2, f_3 sono continue $\Leftrightarrow \det(\underline{F}) \neq 0, \det(\underline{F}) > 0$

Se $\vec{Q} = \underline{f}(\vec{P}) \Rightarrow \vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \underline{f}(\vec{P}) - \vec{P}$

In componenti: $v_i = f_i(x_1, x_2, x_3) - x_i$

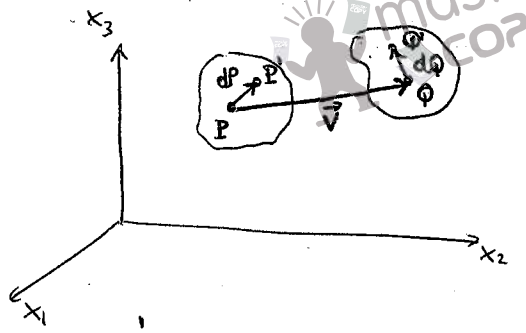
Derivando rispetto a x_j:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \underline{F} - \underline{I}}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} - 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - 1 \end{bmatrix}$$

GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

- Considero:



$$d\rho = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad d\varphi = \begin{bmatrix} d\eta_1 \\ d\eta_2 \\ d\eta_3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi' = \underline{f}(\underbrace{\vec{P}+d\rho}_{P'})$$

$$\eta_1' = \underline{f}_1(x_1+dx_1 ; x_2+dx_2 ; x_3+dx_3)$$
$$\eta_2' = \underline{f}_2(x_1+dx_1 ; x_2+dx_2 ; x_3+dx_3)$$
$$\eta_3' = \underline{f}_3(x_1+dx_1 ; x_2+dx_2 ; x_3+dx_3)$$

$$\Rightarrow \eta_1' = \underline{f}_1(x_1,x_2,x_3) + \frac{d\underline{f}_1}{dx_1}dx_1 + \frac{d\underline{f}_1}{dx_2}dx_2 + \frac{d\underline{f}_1}{dx_3}dx_3$$
$$\eta_2' = \underline{f}_2(x_1,x_2,x_3) + \frac{d\underline{f}_2}{dx_1}dx_1 + \frac{d\underline{f}_2}{dx_2}dx_2 + \frac{d\underline{f}_2}{dx_3}dx_3$$
$$\eta_3' = \underline{f}_3(x_1,x_2,x_3) + \frac{d\underline{f}_3}{dx_1}dx_1 + \frac{d\underline{f}_3}{dx_2}dx_2 + \frac{d\underline{f}_3}{dx_3}dx_3$$

$$\left[\underline{\varphi}' = \underline{\varphi} + \underline{F}\,d\vec{P}\right] \Rightarrow d\vec{\varphi}' = \vec{\varphi}' - \vec{\varphi} = \underline{F}\,d\vec{P} = (\underline{H}+\underline{I})\,d\vec{P} = \underline{H}\,d\vec{P} + \underline{I}\,d\vec{P}$$

Definito $d\rho = |d\vec{P}|$

$dq = |d\vec{\varphi}|$

$$\left[\varepsilon_\eta = \frac{dq - d\rho}{d\rho}\right]$$ COEFFICIENTE DI DILATAZIONE IN 3 DIMENSIONI

- $\varepsilon_\eta = \frac{dq}{d\rho} - 1 \Rightarrow \frac{dq}{d\rho} = 1 + \varepsilon_\eta$

Dato che: $d\vec{\varphi} \cdot d\vec{\varphi} = dq^2$ (norma)

$$d\vec{\varphi} = \underline{F}\,d\vec{P}$$

$$\Rightarrow d\vec{\varphi} \cdot d\vec{\varphi} = dq^2 = (F \cdot d\vec{P})(F\,d\vec{P}) = (F\,d\rho\,\vec{m})(F\,d\rho\,\vec{m}) = d\rho^2\,(F\vec{m})(F\vec{m})$$

$dq^2 = dp^2\ (F\vec{m})(F\vec{m})$

Sostituendo: $(1+\varepsilon)^2 = (\underbrace{F\vec{m}}_{\vec{a}})\ (\underbrace{F\vec{m}}_{\vec{b}})$

Per la proprietà: $\underbrace{A}_{A}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = A^T\ \vec{b}\ \vec{a}$

$(1+\varepsilon_x)^2 = (F^T F\ \vec{m})\cdot\vec{m}$

Chiamo: $\underline{C} = F^T F$ → TENSORE DESTRO DI CAUCHY

$(1+\varepsilon_x)^2 = \underline{C}\,\vec{m}\cdot\vec{m}$

Sapendo che: $\underline{F} = \underline{H} + \underline{I}$

$$\underline{C} = \underline{F}^T\underline{F} = (\underline{H}+\underline{I})^T(\underline{H}+\underline{I}) = \underbrace{\underline{H}^T\underline{H}}_{\text{trascurabile}} + \underline{H}^T + \underline{H} + \underline{I} \quad \Rightarrow \underline{C} = \underline{H}^T + \underline{H} + \underline{I}$$

Dato: $\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$

Se lo spostamento è piccolo $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \ll 1\right)$ ⇒ lo spostamento dei punti del corpo è piccolo.

Sostituendo $\underline{C}$: $(1+\varepsilon_x)^2 = \left[(\underline{H}^T + \underline{H} + \underline{I})\,\vec{m}\right]\cdot\vec{m} = \left[(\underline{H}^T+\underline{H})\,\vec{m} + \vec{m}\right]\vec{m} =$

$$= (\underline{H}^T+\underline{H})\,\vec{m}\cdot\vec{m} + \underbrace{\vec{m}\cdot\vec{m}}_{=1\ (\text{norma})}$$

$\Rightarrow (1+\varepsilon_x)^2 = 1 + (\underline{H}+\underline{H}^T)\,\vec{m}\cdot\vec{m}$

Essendoci a dx numeri piccoli ⇒ anche a sx ho numeri piccoli ⇒ $\varepsilon_x^2 \simeq 0$

$$1 + 2\varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_x^2}_{\simeq 0} = 1 + (\underline{H}+\underline{H}^T)\,\vec{m}\cdot\vec{m}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\underline{H}+\underline{H}^T)\,\vec{m}\cdot\vec{m}$$

Ovvero: $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{H}+\underline{H}^T)$ → TENSORE DI DEFORMAZIONE INFINITESIMA

$$\left[E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right]$$