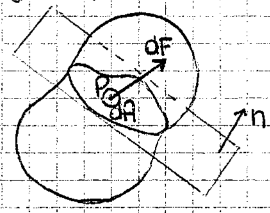
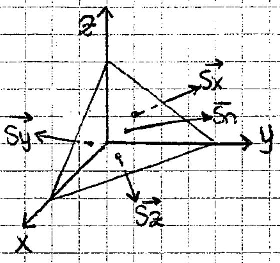
RIPASSO

<u>Assioma di Eulero</u>: un corpo è in <u>equilibrio</u> se lo è ogni sua singola parte.

<u>Principio delle tensioni di Cauchy</u>: $\lim_{dA \to 0} \frac{dF}{dA} = \vec{S_n}$





$\vec{S_n}\, dA = \vec{S_x}\, dA_x + \vec{S_y}\, dA_y + \vec{S_z}\, dA_z$

$\vec{S_n} = \underbrace{S_x \vec{n_x}}_{3\text{ coord.}} + \underbrace{S_y \vec{n_y}}_{3\text{ coord.}} + \underbrace{S_z \vec{n_z}}_{3\text{ coord.}}$ → 9 coordinate: tensore

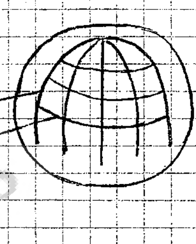
<u>Tensore di sforzo</u>: $T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$ $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$
↳ 6 incognite

<u>Equazione secolare</u> $\sigma^3 + I\sigma^2 + II\sigma + III = 0$

I, II e III sono gli invarianti: costanti al variare del sistema di riferimento.
Risolvendo l'equazione secolare trovo le direzioni principali della tensione.

<u>Isostatiche</u>: traiettorie costruite dalle tangenti ai vettori delle tensioni principali

isostatiche di compressione
isostatiche di trazione

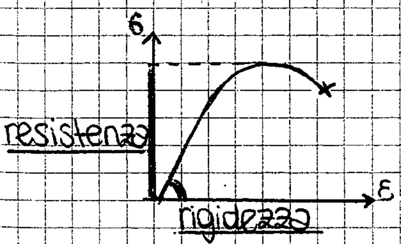


<u>Equazioni indefinite di equilibrio</u>: $\operatorname{div} T + \vec{b} = 0$

<u>Equazioni costitutive</u>: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$

<u>Equazioni cinematiche</u>: $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$

<u>Modello costitutivo elastico-lineare</u>: assenza di memoria (restituisce completamente le deformazioni subite sotto sforzo) + legami costitutivi lineari
- → teoria del 1° ordine: quando linearizzo mi fermo alle derivate prime
  configurazione deformata = configurazione indeformata
- → teoria del 2° ordine: quando linearizzo mi fermo alle derivate seconde
  configurazione deformata ≠ configurazione indeformata

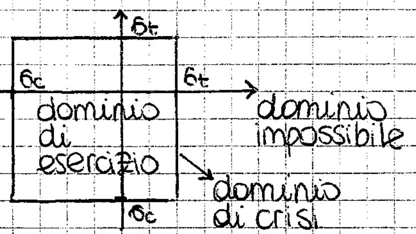


<u>rigidezza</u>: quanto il materiale si oppone alle deformazioni
<u>resistenza</u>: quanto il materiale resiste, prima di rompersi, agli sforzi.

materiali
- → <u>duttili</u>: hanno un dominio elastico molto elevato, superato il quale ci mettono molto a rompersi
- → <u>fragili</u>: dominio elastico molto piccolo, superato il quale si rompono subito

Criteri di resistenza - materiali fragili

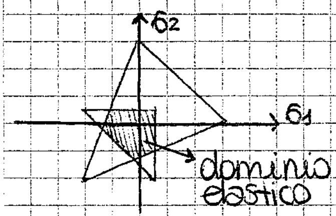
CRITERIO DI GALILEO-RANKINE: valido per materiali fragili



σ_t : sforzo normale di trazione
σ_c : sforzo normale di compressione

$\sigma_c \leq \sigma_{min}$ $\quad$ $\sigma_{max} \leq \sigma_t$

CRITERIO DI GRASHOF-DE SAINT VENANT: limito sia le deformazioni che gli sforzi



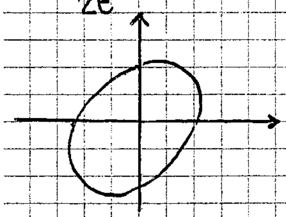
$\varepsilon_c < \varepsilon_1 < \varepsilon_t$ $\quad$ $\sigma_c < \sigma_1 - \nu\sigma_2 < \sigma_t$

$\varepsilon_c < \varepsilon_2 < \varepsilon_t$ $\quad$ $\sigma_c < -\nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 < \sigma_t$

$\varepsilon_c < \varepsilon_3 < \varepsilon_t$ $\quad$ $\sigma_c < \sigma_2 - \nu\sigma_1 < \sigma_t$

CRITERIO DI BELTRAMI: limito l'energia di deformazione φ

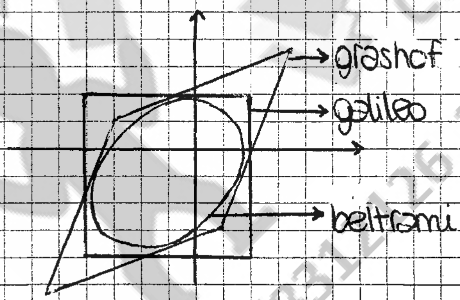
$$\varphi = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$$



$$I_1^2 - 2(1-\nu)I_2 \leq \sigma_0^2$$

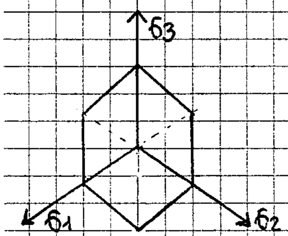
$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_0^2$$

mettendo tutto insieme:



materiali duttili

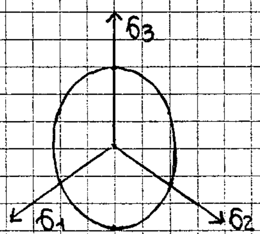
CRITERIO DI TRESCA: limito le tensioni tangenziali



$$2\tau_{max} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\}$$

$$\sigma_{i0} = \sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{yz}^2}$$

CRITERIO DI VON MISES: limito l'energia distorcente



$$\sigma_{i0} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{yz}^2}$$

SICUREZZA STRUTTURALE

Voglio creare un modello unico:
- schema geometrico della struttura e degli elementi strutturali;
- azioni agenti sulla struttura;
- vincoli;
- comportamento dei materiali.

il mondo reale non è deterministico, ma probabilistico
↳ non posso essere sicura che il collasso della struttura sia impossibile, ma posso imporre che sia molto improbabile.

Azioni → sollecitazioni < resistenze

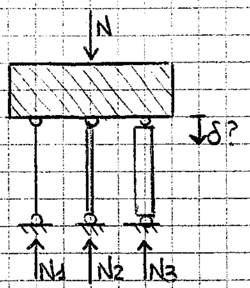
Per ogni azione che la struttura subisce bisogna individuare una prestazione che la struttura deve avere per evitare che la struttura:
- ↳ si rompa
- ↳ subisca deformazioni troppo alte

⇒ studio degli <u>STATI LIMITE</u>: condizione superata la quale la struttura in esame o uno dei suoi elementi non soddisfa più le esigenze per le quali è stata progettata

- stati limite
  - → stato limite ultimo (SLU)
    - → stato limite di salvaguardia della vita (SLV)
    - → stato limite di collasso (SLC)
  - → stato limite di esercizio (SLE)
    - → stato limite di danno (SLD)
    - → stato limite di operatività (SLO)

STRUTTURE IPERSTATICHE - METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Esempio:



eq. costitutive:

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} \\ \delta_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} \\ \delta_3 = \frac{N_3 \ell_3}{EA_3} \end{cases}$$

eq. equilibrio:

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

eq. congruenza:

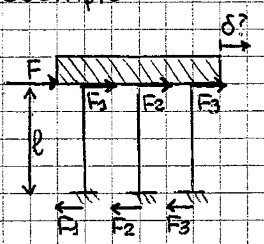
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$$

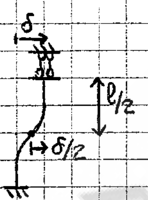
$$\begin{cases} N_1 = \frac{EA_1 \delta}{\ell_1} \\ N_2 = \frac{EA_2 \delta}{\ell_2} \\ N_3 = \frac{EA_3 \delta}{\ell_3} \end{cases}$$

$$\frac{EA_1\delta}{\ell_1} + \frac{EA_2\delta}{\ell_2} + \frac{EA_3\delta}{\ell_3} = N$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{N}{\frac{EA_1}{\ell_1} + \frac{EA_2}{\ell_2} + \frac{EA_3}{\ell_3}}$$

Esempio:





simmetria polare

$$\frac{\delta}{2} = \frac{F \cdot (\ell/2)^3}{3\,EJ}$$

$$\delta = \frac{F\ell^3}{12EJ}$$

eq. costitutive

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{F_1 \ell^3}{12EJ_1} \\ \delta_2 = \frac{F_2 \ell^3}{12EJ_2} \\ \delta_3 = \frac{F_3 \ell^3}{12EJ_3} \end{cases}$$

eq. equilibrio

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

eq. congruenza

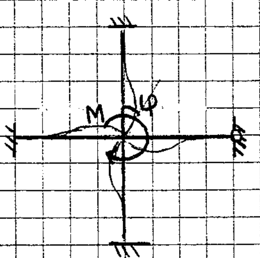
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$$

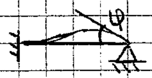
$$F_i = \frac{\delta\, 12 EJ_i}{\ell}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{12\delta}{\ell}(EJ_1 + EJ_2 + EJ_3)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{F\ell}{12} \frac{1}{(EJ_1 + EJ_2 + EJ_3)}$$

Esempio:





$$\varphi = \frac{M\ell}{4EJ}$$

eq. costitutive

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{M_1 \ell_1}{4EJ_1} \\ \varphi_2 = \frac{M_2 \ell_2}{4EJ_2} \\ \varphi_3 = \frac{M_3 \ell_3}{4EJ_3} \\ \varphi_4 = \frac{M_4 \ell_4}{4EJ_4} \end{cases}$$

eq. equilibrio

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

eq. congruenza

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi$$

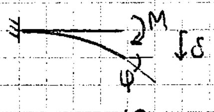
$$M_i = \frac{\varphi\, 4 EJ_i}{\ell_i}$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 4\varphi\left(\frac{EJ_1}{\ell_1} + \frac{EJ_2}{\ell_2} + \frac{EJ_3}{\ell_3} + \frac{EJ_4}{\ell_4}\right)$$

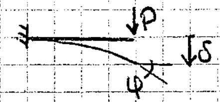
$$\Rightarrow \varphi = \frac{M}{4\left(\frac{EJ_1}{\ell_1} + \frac{EJ_2}{\ell_2} + \frac{EJ_3}{\ell_3} + \frac{EJ_4}{\ell_4}\right)}$$

Esercizio:

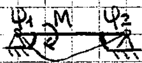
dati utili dal prontuario:



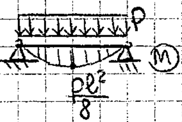
$\delta = \frac{M\ell^2}{2EJ}$ $\quad \varphi = \frac{M\ell}{EJ}$

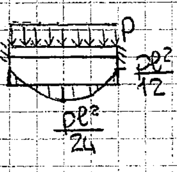


$\delta = \frac{P\ell^3}{3EJ}$ $\quad \varphi = \frac{P\ell^2}{2EJ}$

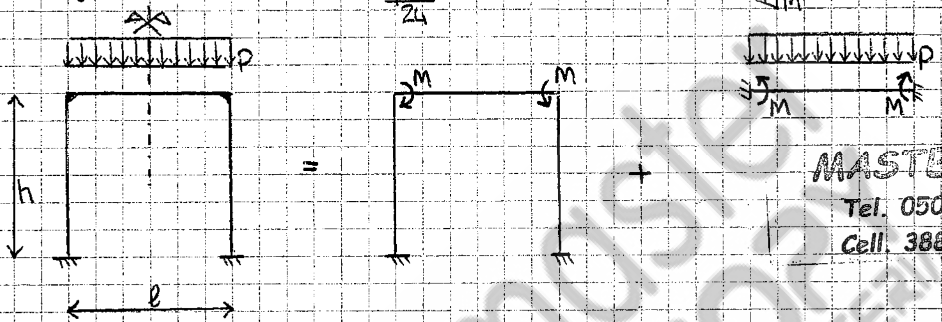


$\varphi_1 = \frac{M\ell}{3EJ}$ $\quad \varphi_2 = \frac{M\ell}{6EJ}$



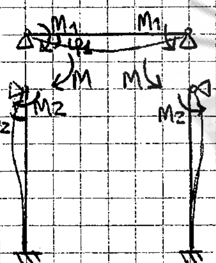


$\varphi = \frac{M\ell}{4EJ}$



12 gradi di vincolo ; 9 gradi di libertà $\rightarrow$ 3 incognite iperstatiche

1 incognita cinematica : rotazione φ di un nodo.



$\varphi_1 = \frac{M_1\ell}{3EJ} + \frac{M_1\ell}{6EJ} = \frac{M_1\ell}{2EJ}$ $\rightarrow$

$\varphi_2 = \underbrace{\frac{M_2 h}{4EJ}}_{\text{da prontuario}}$ $\rightarrow$

eq. costitutive:

$M_1 = \varphi_1 \frac{2EJ}{\ell}$

$M_2 = \varphi_2 \frac{4EJ}{h}$

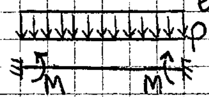
eq. equilibrio:

$M = M_1 + M_2$

eq. congruenza:

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$M = M_1 + M_2 = \frac{2\varphi EJ}{\ell} + \frac{4\varphi EJ}{h} \Rightarrow \varphi = \frac{M}{\frac{2EJ}{\ell} + \frac{4EJ}{h}} = \frac{M}{2EJ\left(\frac{1}{\ell} + \frac{2}{h}\right)} = \frac{M\ell h}{2EJ(h+2\ell)}$

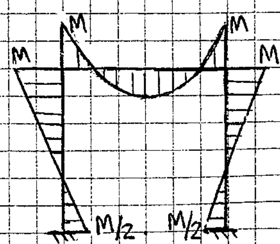


$M = \frac{p\ell^2}{12}$ da prontuario

$$\boxed{\varphi = \frac{p\ell^3 h}{24EJ(h+2\ell)}}$$

Traccio il diagramma dei momenti:

$$\begin{cases} M_1 = \varphi \frac{2EJ}{\ell} - \frac{p\ell^2}{12} = \frac{p\ell^{\cancel{3}2} h\, \cancel{2EJ}}{\cancel{\ell}\, \underset{12}{\cancel{24}}\cancel{EJ}(h+2\ell)} - \frac{p\ell^2}{12} = \frac{\cancel{p\ell^2 h} - \cancel{p\ell^2 h} - 2p\ell^3}{12(h+2\ell)} = \frac{-p\ell^3}{6(h+2\ell)} \\ M_2 = \varphi \frac{4EJ}{h} = \frac{p\ell^3 \cancel{h}\cancel{4EJ}}{\cancel{h}\underset{6}{\cancel{24}}\cancel{EJ}(h+2\ell)} = \frac{p\ell^3}{6(h+2\ell)} \end{cases}$$



giustamente $M_1 = M_2$ perchè la struttura non è caricata sui nodi