# ANALISI [Ilaria Del Corso + Marco Ghimenti]

## Principio di induzione

$\mathbb{N}$ = naturali $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = interi $\{0, \pm1, \pm2, \pm3 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = razionali $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ [in. decimali finiti o periodici]

$\mathbb{R}$ = reali

$\mathbb{C}$ = complessi $\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (contenuto)

Per un numero naturale esiste sempre un successivo (anche per gli interi)




Principio di induzione → è un metodo di dimostrazione. Può servire a dimostrare proprietà definite sui numeri naturali (o più in generale per gli interi $\geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$)

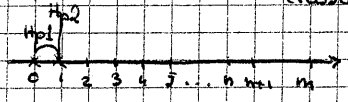
Es. $n! \geq 2^n$ [$n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$] questo è un enunciato da verificare

↳ Sia $P(n)$ una proprietà definita per $n \in \mathbb{N}$

Supponiamo che:

Hp. [1) $P(0)$ sia vera (passo base)
2) $\forall n \geq 0$ se $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera (passo induttivo)] } Allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq 0$

Questo può essere fatto da vedi Es 6




Se è vero la prima è vera anche quella dopo

Es 1 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 0$ Questo però è un enunciato chiuso

Verifico le Hp del P.I.

1) $P(0) \rightarrow 0 = \frac{0(0+1)}{2} \rightarrow 0 = 0$ ✓

2) Assumo che $P(n)$ sia vera → $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e dimostro che $P(n+1)$ è vera → $\underbrace{1 + \dots + n}_{\text{questo lo so già}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

Poiché $P(n)$ è vera / Per Hp induttiva → $P(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Per il principio di induzione so che $P(n)$ è vera $\forall n \geq 0$

Es 2 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \geq 0$ [in realtà si deve scrivere $\sum_{i=0}^{n} i^2$]

1) $P(0) \rightarrow 0^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} \rightarrow 0 = 0$ ✓

2) Assumo che $P(n)$ sia vera → $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e dimostro che $P(n+1)$ è vera $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Poiché $P(n)$ è vera / Per Hp induttiva → $(1^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$

A questo punto posso o fare il Δ o fare il prodotto $(n+2)(2n+3)$ e verificare che torna

$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$ ✓

Es3 $1 \neq a \in \mathbb{R}$ $1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\forall n \geq 0$ [o meglio $\sum_{i=0}^{n} a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$]

1) $P(0) \to a^0 = 1 = \frac{a^1-1}{a-1} \to 1 = 1$ ✓

2) Assumo $P(n)$ vera e dimostro $P(n+1)$: $\underbrace{a^0+a+\dots+a^n}_{P(n) \text{ per ip induttiva}} + a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$

$$\frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{(n+1)} = a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

Es4 $n! \geq 2^n$ ⚠ Per definizione $0! = 1$

1) $P(0) \to 1 \geq 2^0 \to 1 \geq 1$ ✓

2) Assumo $P(n)$ vera e dimostro $P(n+1)$: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

$(n+1)! = (n+1)\, n! \geq (n+1)\, 2^n$ (ip. ind. + $(n+1) > 0$)

$(n+1)\, n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)\, n! = (n+1)!$

⚠ in questo caso non funziona perché non vale $\forall n$ $P(1)$ non sembra verificata in questo caso non ce la faccio

$P(1) \to 1! \geq 2^1$ FALSO cerco quindi un passo base che possa funzionare

$P(2) \to 2! \geq 2^2 \to 2 \geq 4$ FALSO

$P(3) \to 3! \geq 2^3 \to 6 \geq 8$ FALSO

$P(4) \to 4! \geq 2^4 \to 24 \geq 16$ ✓

## FUNZIONI

$f$ $X$ $Y$ è una terna — $f$ è una legge che ad ogni elemento del dominio $X$ associa uno e un solo elemento del codominio $Y$

$f$: legge; $X$: dominio; $Y$: codominio

$f: X \to Y$ $\quad f(x) = \dots \quad \forall x \in X$

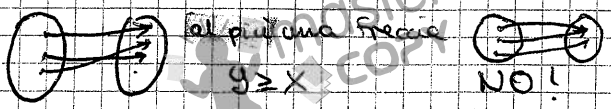



È una $f$ da $X$ a $Y$ | NON è una $f$ | NON è una $f$

Le funzioni si possono fare anche in situazioni non numeriche

$f: X \to Y$ si dice INIETTIVA se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte del codominio

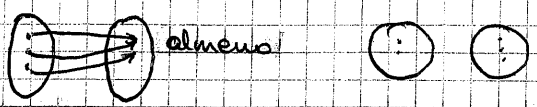
$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$




surgettiva

$f: X \to Y$ si dice SURIETTIVA se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio

$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \mid f(x) = y$




Se $X$ e $Y$ sono insiemi finiti

$|X| = n \quad |Y| = m \quad n, m \in \mathbb{N} \to$

$\#X = n$

$\exists f: X \to Y$ iniettiva

$\Leftrightarrow |Y| = m \geq |X| = n$

**Dim**

$\Rightarrow$ Poiché $f$ è iniettiva $f(x_i) \neq f(x_j)\ \forall i \neq j$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\} \subset Y$

$f(x_1), \dots f(x_n) \in Y$ $|\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}| = n \rightarrow |Y| \geq n = |X|$

**Dim**

$\Leftarrow$

$X = \{x_1 \dots x_n\}$ $f(x_1) = y_1$ ; $f(x_2) = y_2$ ; $\dots$ ; $f(x_n) = y_n \rightarrow f(x_i) = y_i\ \forall i$

$Y = \{y_1, \dots y_m\}$ Poiché da $x$ distinti corrispondono $y_i$ distinti

ma $m \geq n$ $f$ è iniettiva

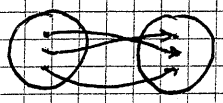
**Esercizio**

$|X| = n$ $|Y| = m$ $\exists f: X \rightarrow Y$ su $\Leftrightarrow m \leq n$

$f: X \rightarrow Y$ si dice **BIUNIVOCA** se è una funzione iniettiva che suriettive

$\forall y \in Y\ \exists!\ x \in X \mid f(x) = y$

(perché è anche iniettiva e devono essere al più 1 non più almeno



$m = n$ Infatti si chiama anche corrispondenza 1 a 1

Se $f: X \rightarrow Y$ è biiettiva posso definire $f^{-1}: Y \rightarrow X$ $y \rightarrow x$ scelgo come $x$ l'unico elemento di $X \mid f(x) = y$

$f: X \rightarrow Y$ $f(x)$ = immagine di $x$ secondo $f$

$y \in Y$ $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ questo può essere un punto, vuoto, o tante cose



$f(1) = a$ ; $f(2) = a$ ; $f(3) = a$ ; $f(4) = b$

$f^{-1}(a) = \{1, 2, 3\}$

$f^{-1}(b) = \{4\}$

$f^{-1}(c) = \emptyset$

$A \subset X$ $B \subset Y$ $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$

immagine di A $\nearrow$ $f(\{1, 2, 3\}) = \{a\}$

controimmagine di B $\rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$f(X) = \text{Im } f$

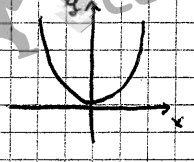
$f$ è suriettive $\Leftrightarrow f(X) = Y$

**Il codominio è un dato, l'Im può essere più piccole del codominio**

**Esempio**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^2$



questa non lo è perché il codominio è più grande dell'Im.

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$x \rightarrow x^2$ questa è suriettiva perché codominio e Im sono uguali

Esempio 1

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Devo controllare che ad ogni elemento del dominio associo uno ed un solo elemento del codominio

$x \to 2x$

Se $x$ è un numero intero e moltiplico per un numero intero ottengo un numero intero quindi $f(x)$ è una funzione che va da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$

$\forall x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 2x \in \mathbb{Z}$

$f$ è iniettiva? $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$?

$f(x) = 2x \neq f(y) = 2y$ sì per la legge di cancellazione perché se questi fossero uguali ($2x = 2y$) allora $x = y$

$f$ è suriettiva? No perché $f(x) = 2x \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad 1 \notin \text{Im} f$

Esempio 2:

$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \to 2x$ $f$ è una funzione perché se $x \in \mathbb{Q}$ allora anche $2x \in \mathbb{Q}$

$f$ è iniettiva? $f(x) = f(y) \iff 2x = 2y \iff x = y$ per la legge di cancellazione

[Ricordo che $f$ iniettiva $\equiv x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ e quella è lo stesso perché dire che $A \Rightarrow B \quad \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ → non quella è la contronominale]

$f$ è suriettiva? Devo dimostrare che $\forall y \in \mathbb{Q} \quad y/2 = x \in \mathbb{Q}$ e $f(y/2) = 2y/2 = y$ quindi sì

## GRAFICO DI FUNZIONI

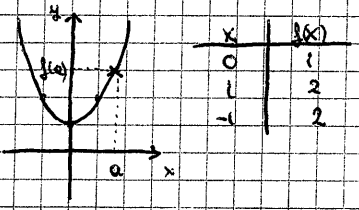
$f: X \to Y$

$G_f$ è il sottoinsieme di $X \times Y$ definito da $G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2 + 1$

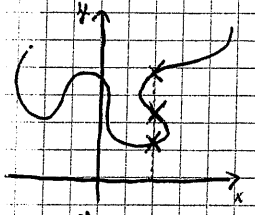
$G_f = \{(x, x^2+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$



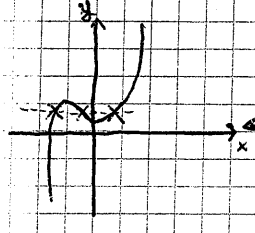

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| -1 | 2 |

$\forall x \in X \; \exists! \; y \mid (x, y) \in G$

Invece

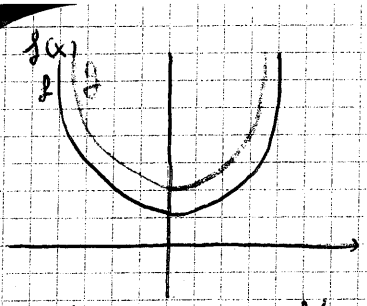



questo no perché incontro troppi punti Non è una funzione




$f$ è iniettiva se $\forall y_0 \in Y$ la retta $y = y_0$ incontra al più una volta $G$ ← questa ovviamente no

master COPY



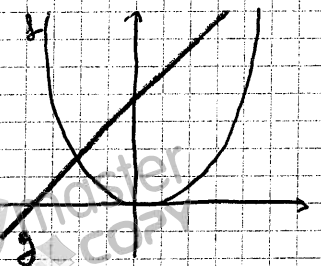

$f, g \; X \to \mathbb{R}$

$f+g \; X \to \mathbb{R}$

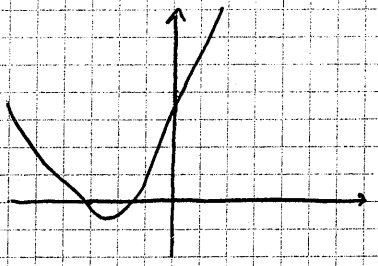
$x \to f(x)+g(x)$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$g(x) = f(x)+1$




$f+g$ →



$f(x) = x^2$

$g(x) = x+3$

$(f+g)(x) = x^2+x+3$

$f \; A \to B \quad g \; B \to C$

$g \circ f \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

composto $\quad x \longrightarrow f(x) \longrightarrow gf(x)$

$g \circ f = g(f(x))$

$f \; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^2 \quad x \to x+1$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$

## COMPOSIZIONE DI FUNZIONE

$f$ biiettiva $f^{-1}$ la $f$ inversa è l'unica funzione t.$f^{-1} \circ f = id_x$ (identità)

$f \circ f^{-1} = id_y$

$f \; x \to y$

$f^{-1} \; y \to x$

$f^{-1} \circ f \; x \to x$

## FUNZIONI PARI E DISPARI

$f \; A \to \mathbb{R} \quad A \subset \mathbb{R}$

A è simmetrico rispetto a 0 cioè che se $x \in A \Rightarrow -x \in A$

Esempi $A = \mathbb{R}$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$

$A = (-3, 3)$

Condizione iniziale che il dominio sia simmetrico

$f \; A \to \mathbb{R}$ si dice PARI se $\forall x \in A \quad f(x) = f(-x)$

DISPARI se $\forall x \in A \quad f(x) = -f(-x)$

Esempi

Pari → $|x|$; $x^2$; $\cos x$; $x^4+x^2+3$; 5

Dispari → $x$; $x^3$; $\sin x$;

Esercizio

1) $f$ dispari $\Rightarrow f(0) = 0$

2) $f$ è sia pari che dispari $\Rightarrow f(x) = 0 \; \forall x$

3) $f$ e $g$ sono pari $\Rightarrow f \pm g$ è pari

4) $f$ e $g$ sono dispari $\Rightarrow f \pm g$ è dispari

5) $\forall f \; A \to \mathbb{R} \; A \ldots \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{pari}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{dispari}}$