Angelo di Garbo

angelo.digarbo@ibf.cnr.it → per ricevimento scrivere per mail

master COPY

master COPY CONSIGLIA

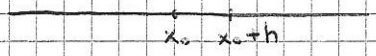
master COPY

RIPASSO DI MATEMATICA

$F(x)$: $I_1 \longrightarrow I_2$ $\quad I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervalli

Spesso si usa la notazione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ma in base a dove è definita sono intervalli

$F(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$



Derivata di $F(x)$ in x_0

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \quad \text{quando } \exists \lim$$

Vale (TEOREMA)

Sia $F(x)$ derivabile in x_0, allora $F(x)$ è continua in x_0

NB: non vale il viceversa (es. $|x|$ è continua ma non derivabile in 0)

ESEMPIO

$F(x) = x^2$ definita in $\mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + h^2 + 2x_0h - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x_0)}{h} = 2x_0$$

$$\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1} \qquad \text{Generalizzazione}$$

(TEOREMA)

Sia $F(x)$ definita in $I \to I_2$, $F(x): I \to I_1$, con $I, I_1 \subset \mathbb{R}$

con $F(x) = \sum_{j=1}^{N} G_j(x)$ somma di funzioni G tali per cui I aperto

e $G_j(x)$ definita in I. Se $x_0 \in I$ e se $\left.\frac{dG_j(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ esiste $\forall j$

allora la derivata $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = \sum_{j=1}^{N} \left.\frac{dG_j(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ → Derivata della somma = somma delle derivate

(TEOREMA)

Data $F(x) = G_1(x)\,G_2(x)$ con $F(x), G_1(x), G_2(x): I \to I_1$, I aperto.

Supponiamo che in $x_0 \in I$ esistano $\frac{dG_1(x)}{dx}$ e $\frac{dG_2(x)}{dx}$ allora la derivata

di $\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left[\frac{dG_1(x)}{dx}\,G_2(x) + G_1(x)\,\frac{dG_2(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$ → Regola del prodotto

Sia nella somma che nel prodotto tutte le funzioni devono avere lo stesso dominio I

ESEMPIO

- $F(x) = x^2 + \sin x$ definita su $\mathbb{R}$

$$\frac{dF}{dx} = 2x + \cos x$$

- $F(x) = x^5 \cos x$ definita su $\mathbb{R}$

$$\frac{dF}{dx} = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x$$

$$\left\{ \frac{d \sin x}{dx} = \cos x \qquad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \right\}$$

TEOREMA

$F(x) = \dfrac{G_1(x)}{G_2(x)} : I \longrightarrow I_1$, I aperto, $G_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.

Sia $x_0 \in I$ e $\dfrac{dG_1(x)}{dx}$, $\dfrac{dG_2(x)}{dx}$ esistano in x_0. Allora $\dfrac{dF(x)}{dx}$ è

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left[\frac{\frac{dG_1(x)}{dx} \cdot G_2(x) - G_1(x) \frac{dG_2(x)}{dx}}{G_2(x)^2} \right]_{x=x_0}$$

→ Regola del quoziente

ESEMPIO

Vogliamo calcolare $\dfrac{d(\tan(x))}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$

$(2k+1)\frac{\pi}{2}$ punti in cui si annulla $\cos x$, quindi prendo un intervallo in cui non siamo compresi questi punti

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\frac{d \sin x}{dx} \cos x - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ES. X CASA

Calcola $\dfrac{d}{dx}(\cot g x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} =$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ESEMPIO

$F(x) = \dfrac{\tan(x)\, x^2}{x \cos x}$, con $x \in I$ in cui $x \neq 0$ e $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$\frac{dF}{dx} \left[\left(\frac{x^2}{\cos^2 x} + 2x \tan x \right)(x \cos x) - \tan(x)\, x^2 (\cos x - x \sin x) \right] / (x \cos x)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{\cos x} + 2x^2 \sin x \right) - \left(\sin x \cdot x^2 - \frac{\sin^2 x}{\cos x} x^3 \right) \right] / (x \cos x)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^3 + x^3 \sin x \cos x + \sin^2 x \cdot x^3}{\cos x} \right) / (x \cos x)^2 = \frac{x + \sin x \cos x + x \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

ESEMPIO

$F(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$\frac{dFx}{dx} = \frac{d}{dx} x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

ESEMPIO

$a > 0 \quad a \neq 1$

$F(x) = a^x$ funzione esponenziale

$F(x) = \log_a(x)$

Se $F(x) = e^x$ in un x generico $\frac{dF(x)}{dx} = e^x$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + o(h^2) - 1\right]}{h} =$

posso approssimare $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} \ldots$ con Taylor

$= \lim_{h \to 0} e^x \left[1 + \frac{h}{2!} + o(h)\right] = e^x$

($\frac{h}{2!} \to 0$, $o(h) \to 0$)

$a^x = \left[e^{\ln a}\right]^x = e^{x \log_e a}$

$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$ è una derivata della funzione composta

TEOREMA

Sia $F(x): I_1 \longrightarrow I_2$, I_1, I_2 aperti e sia $G(x): I_0 \to I_1$

$I_0 \xrightarrow{G} I_1 \xrightarrow{F} I_2$ allora posso definire $F(G(x)): I_0 \to I_2$ ($I_1 \supseteq I_2$, $I_0 \to I_1$)

(NB non sempre è definita la funzione composta

es. $F(x) = \sqrt{x}$ e $G(x) = -x^2$ $F(G(x))$ non è definita)

Se F è derivabile in I_1 e G è derivabile in I_0 allora si ha

$$\frac{d F(G(x))}{dx} = \frac{dF}{dG} \frac{dG}{dx}$$

→ Regola funzione composta

ESEMPIO

$F(y) = e^y \qquad y = x \log a = G(x) \qquad F(y) = e^{G(x)}$

$\frac{dF}{dx} = e^{G(x)} \frac{dG}{dx} = a^x \log a$

ESEMPIO

$F(x) = \underbrace{x^2}_{G_1(x)} \underbrace{e^{\sin^2 x}}_{G_2(x)}$

$\frac{dF}{dx} = \frac{dG_1(x)}{dx} G_2(x) + G_1(x) \frac{dG_2(x)}{dx} = 2x e^{\sin^2 x} + x^2 \sin 2x \, e^{\sin^2 x}$

$\frac{dG_2}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\overbrace{\sin^2 x}^{G(x)}} = \frac{d}{dG(x)} e^{G(x)} \cdot \frac{dG(x)}{dx} = e^{\sin^2 x} \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x}$

ES x CASA

$F(x) = \frac{e^{x^3 \cos x} - \operatorname{tg} x}{x^2 - \sin^2 x}$

$F(x) = \cos^5 x \cdot \sin^4 x - \operatorname{tg}^4 x \cdot \cos x^3$ calcolare le derivate

$F(x) = \log_a x$

$\frac{d \operatorname{arcsen} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d \operatorname{arccotg} x}{x} = -\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	

ESEMPIO

$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} (e^x + e^x) = e \cosh x$

TEOREMA

$F(x) = k \, G(x) \quad k \in \mathbb{R}$

$\frac{dF(x)}{dx} = k \frac{dG}{dx}$ → Regola prodotto costante - funzione

$\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x$