# GEOMETRIA Mauro di Nasso

Δ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ se vuole lo scrive No

Insiemi → Notazioni

1) Per elencazione Es $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
2) "Estensione di proprietà" $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dispari minore di } 12\}$
3) "Funzionale" $A = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\} \to f(n) = 2n-1 \to 1, 3, 5, 7 \ldots$

$A = B$? due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi

Proprietà: x è un numero naturale dispari minore di 12
$\exists y \in \mathbb{N} \quad x = 2y - 1 \wedge x < 12$

$A \cap B \ \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ ∩ $A \cap B$
$A \cup B \ \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ ∪ $A \cup B$ ∨ inclusivo perché va bene anche l'intersezione

Es1 21/09/2016 App. Straordinario
TEST
Δ $\{0\} \neq \emptyset$
1) Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ x = 3k + 1\}$ (in realtà non c'era ma lui è magnanimo) Allora $A \cap B = \emptyset$ $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$
$B = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \mid y = n^2\}$ $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots\}$ ⇒ FALSA

Δ $x = \pm 1 \to x = 1 \vee x = -1$
$x \geq \pm 1$ ↑ MANCA SE LO SCRIVI

Es2 13/07/2017
TEST
6) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ x = k^2\}$ $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots\}$ $64 = (2^3)^2$
$B = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ y = n^3\}$ $B = \{1, 8, 27, 64, \ldots\}$ $m6 = z$

$A \cap B = \emptyset$? FALSA

Es3 26/6/2014
TEST
8) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x = n^3\}$
$Y = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ y = 2n\}$

$X \cap Y \neq \emptyset$ $X \cap Y$ = cubi dei numeri pari $= \{z \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\ z = (2m)^3 = 8m^3\}$

Altre Proprietà

- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ differenza
- $A \cap B = B \iff B \subseteq A$ (sottoinsieme) $\quad \forall x\,(x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $A \cup B = B \iff A \subseteq B$
- $A = B \iff A \cap B = A \cup B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$A \times B$ prodotto cartesiano

- coppie ordinate → $(1, 2) \neq (2, 1)$
- coppie non ordinate → $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Δ $A = \{1, 3, 5\}$ $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ FALSO ⇒ $(3, 3) \in A \times B$, $(3, 3) \in B \times A$
$B = \{2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (3, 2) \ldots\}$

$B \times A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3) \ldots\}$

$|A \cup B| \overset{?}{=} |A| + |B|$ non è vera in generale (vedi es sopra)

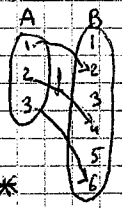
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ questa è vera in generale

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



Funzioni: "legge" che associa ad ogni elemento $a \in A$ del dominio un unico elemento $b \in B$ del codominio che si denota $f(a) \in B$

$f: A \to B$ $f$ è una funzione con dominio $A$ e codominio $B$ ($A$ e $B$ sono insiemi)




$f(x) = 2x$ "doppio"

$f: A \to B$

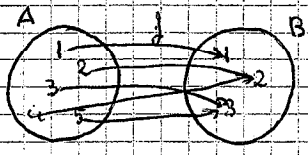
$\Delta$ fondamentale stabilire dominio e codominio altrimenti cambia

[IN ANALISI $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ C.d.E $\mathbb{R} \geq 0$
$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$]

$\Delta$ $\exists!$ x esiste esattamente un x

$\exists$ x esiste almeno un x

## Funzioni iniettive e suriettive




"$f$ è suriettiva se tutti i bersagli vengono colpiti"

* non è suriettiva ma se prendo un sottoinsieme ce la posso far diventare, cambio il codominio

suriettività: Ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio

Es 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(3) = 11$ ma è suriettiva ?

$f(x) = 2x + 5$ $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 5$

Prendo un generico $y \in \mathbb{R}$ del codominio, mi chiedo "se viene colpito", cioè se esiste $x \in \mathbb{R}$ nel dominio $| f(x) = y$

Chiedersi se $f(x) = y$ è come dire $2x + 5 = y$ $x = \frac{y-5}{2} \to f(x) = y$

Esempio

$y = 6$

$x = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 6$ Visto che trovo sempre $(\forall y)$ x $| f(x) = y$, concludo che $f$ è suriettiva

Es 2

$f(x) = x^2 - 5$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suriettiva?

Prendo un generico $y \in \mathbb{R}$ del codominio, n'esco sempre e trovare $x | f(x) = x^2 - 5 = y$?

$x^2 - 5 = y \to x^2 = y + 5 \to$ Ho soluzione se $x \iff y + 5 \geq 0$

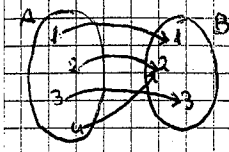
- Se $y + 5 \geq 0$ cioè se $y < -5$ NON esistono soluzioni, cioè $x | f(x) = y$ } NON è suriettiva
- Se invece $y + 5 \geq 0$, allora prendo $x = \sqrt{y+5}$ ed ho che $f(x) = y$

L'insieme dei bersagli colpiti si chiama immagine
Quindi una funzione è suriettiva quando l'insieme immagine = codominio

**Def**

$f: A \to B$ si dice SURIETTIVA se $\forall b \in B \; \exists x \in A \; f(x) = y$

Funzione iniettiva




questo NON è iniettivo perché 2 "è colpito 2 volte" per essere iniettiva ogni "bersaglio" deve essere colpito al più una volta [quindi anche non colpito]

**Def**

$f: A \to B$ si dice INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



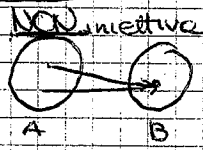
**Esempi**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ $f$ è suriettiva? NO non esistono $x$ t.c. $f(x) = -1$
$f$ è iniettiva? NO $9 = f(3) = f(-3)$

$\text{Im} f = [0; +\infty)$

contro-positiva
$P \Rightarrow Q$
$\neg Q \Rightarrow \neg P$
non

NON iniettiva




**Riepilogo**

DEF $f: A \to B$ si dice INIETTIVA se ogni elemento del codominio è immagine di <u>al più</u> un elemento del dominio

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Equivalentemente

$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(quindi in questo caso se prendo due punti e vedo che vanno nello stesso, un esempio è il caso in cui prendo due volte lo stesso)

**Esempio 1**

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = 2x$ 1) $f$ suriettiva? NO, numeri dispari $\notin$ all'immagine [A occhio che sei in $\mathbb{N}$]

$\text{Im} f = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ numeri pari

2) $f$ iniettiva? $f(n_1) = f(n_2)$, cioè se $2n_1 = 2n_2 \to n_1 = n_2 \Rightarrow$ SI

**Esempio 2**

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2$ 1) $f$ suriettiva? NO perché non tutti i numeri sono quadrati $\text{Im} f \neq \mathbb{N}$

$\text{Im} f = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ quadrati

2) $f$ iniettiva? $f(n_1) = f(n_2)$, cioè se $n_1^2 = n_2^2 \to n_1 = n_2 \Rightarrow$ SI

**Esempio 2b**

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = n^2$ non è iniettiva Ad esempio $f(3) = f(-3) = 9$

⚠ È FONDAMENTALE SPECIFICARE DOMINIO E CODOMINIO

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $f(x) = x^2$ è suriettiva e iniettiva

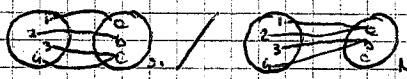
DEF Una funzione che è <u>sia</u> iniettiva che suriettiva si dice BIUNIVOCA o <u>BIJEZIONE</u>

**Funzioni tra insiemi finiti**

$f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\}$ 1) $f$ iniettiva? NO Se ho tre cassetti e 4 oggetti ho 2 elementi in 1 cassetto

- Se $f: A \to B$ e $|A| > |B|$ allora $f$ <u>NON</u> è iniettiva

2) $f$ suriettiva? DIPENDE

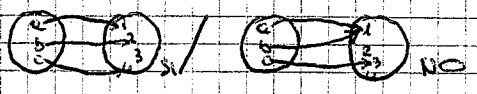



- Se $f$ non iniettiva $\Rightarrow$ $f$ suriettiva? (NO) $[\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q]$ → controesempio
- Se $f$ iniettiva $\Rightarrow$ $f$ suriettiva? (NO)



$g: \{a,b,c\} \to \{1,2,3,4\}$ 1) $g$ suriettiva? NO

2) $g$ iniettiva? DIPENDE




master COPY

Condizione necessaria per avere $f$ iniettiva $\quad f: A \to B$

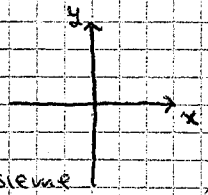
$|A| \leq |B|$

necessaria ma NON sufficiente, perché esistono $f: A \to B$ dove $|A| \leq |B|$ ma $f$ non iniettiva

# SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

$r \begin{cases} x+y=3 \\ s \end{cases}$ [corrisponde ad una retta nel piano cartesiano]

$s \begin{cases} 2x-3y=2 \end{cases}$




$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Possiamo dire che $x+y=3$ è una retta perché è $f(x) = -x+3$, è l'insieme delle soluzioni

$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y=3\}$ = Retta [c'è una dimostrazione dietro] $ax+by+c=0$

L'interpretazione del sistema è l'intersezione tra i due elementi, cioè le rette e può avere

I) 1 soluzione X  II) 0 soluzioni —  III) $\infty$ soluzioni ---

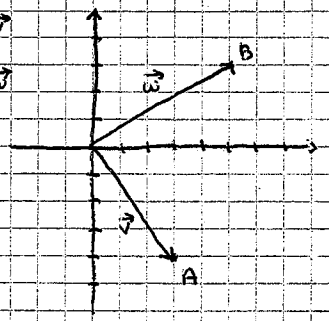
$$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5} \qquad x = \frac{11}{5} \quad y = \frac{4}{5}$$

## PERPENDICOLARITÀ

A (3; -4) $\vec{v}$

B (5; 3) $\vec{w}$



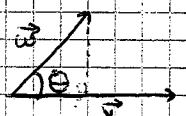

Prodotto scalare

$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = (5 \cdot 3) + (-4 \cdot 3) = 15 - 12 = 3$

non è venuto 0 quindi non sono $\perp$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

## PRODOTTO SCALARE

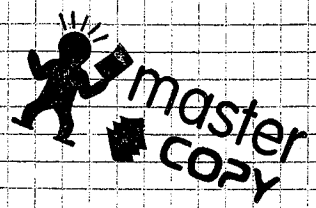


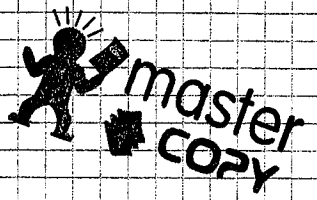

$\vec{v} \cdot \vec{w}$ = prodotto orientato tra la lunghezza di $\vec{v}$ e la proiezione di $\vec{w}$ su $\vec{v}$ [la componente]

$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\theta \Rightarrow$ Se fa 0 sono $\perp$

Quindi il caso I si ha quando $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Il caso II si ha quando $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$



CASO II → $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$

$ad - bc = 0 \Rightarrow$ le rette sono parallele, perché?

Esempio

$$\begin{cases} 6x - 4y = 7 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

$\downarrow \times 2\,\mathrm{I} \quad \times -4\,\mathrm{II}$

$$\begin{cases} -12x + 8y = -14 \\ -12x + 8y = -12 \end{cases}$$

quindi è ovvio che sono rette parallele distinte

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \quad \begin{matrix} \times d\,\mathrm{I} \\ \times -b\,\mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} adx + bdy = \alpha d \\ -bcx - bdy = -\beta b \end{cases}$$

Riepilogo

Def = $f: A \to B$ si dice SURIETTIVA se $\forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$ (ALMENO)

$f: A \to B$ si dice INIETTIVA se $\forall a, a' \in A \ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ (AL PIÙ)

$f: A \to B$ si dice BIUNIVOCA se $f$ è sia iniettiva che suriettiva

Se $A$ e $B$ sono finiti • $\exists f: A \to B$ iniettiva $\Leftrightarrow |A| \leq |B|$

• $\exists f: A \to B$ suriettiva $\Leftrightarrow |A| \geq |B|$

• $\exists h: A \to B$ biunivoca $\Leftrightarrow |A| = |B|$

Funzioni → • Ad ogni elemento del dominio corrisponde un unico elemento del codominio VERA per tutte le funzioni

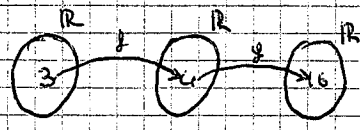
Bisezioni → • Ad ogni elemento del codominio corrisponde un unico elemento del dominio

# COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + 1$ $g(x) = x^2$

$3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} 16$




La composizione "prima $f$ e poi $g$" si può fare a condizione che $\mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{dom} g$

$3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{g} 10$ $\quad 10 \neq 16$ ⚠ Fare l'inverso È DIVERSO

$g \circ f \to f(3) = 4 \quad g(4) = 16 \quad g(f(3)) = 16$ e si scrive $(g \circ f)(3) = 16$ prima $f$ e poi $g$

$f \circ g \to g(3) = 9 \quad f(9) = 10 \quad f(g(3)) = 10 \quad (f \circ g)3 = 10$

Che espressione algebrica corrisponde alla composizione $g \circ f$?

$(g \circ f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + 1 \quad g(x) = x^2$

$x \xrightarrow{f} x+1 \xrightarrow{g} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1$ Es $(g \circ f)(3) = 16$

$g \circ f =$ PRIMA $f$ POI $g$

$(f \circ g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x + 1 \quad g(x) = x^2$

$x \xrightarrow{g} x^2 \xrightarrow{f} x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ Es $(f \circ g)(3) = 10$