COORDINATE CURVILINEE

- SISTEMI DI COORDINATE CURVILINEE

Considero un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) e la funzione

$$u : (x, y, z) \to (u_1, u_2, u_3)$$

che costituisce un CAMBIAMENTO DI COORDINATE a un sistema di COORDINATE CURVILINEE

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

chiameremo:

- SUPERFICI COORDINATE: i piani in cui cambiano solo 2 coordinate e una resta costante

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_2(x, y, z) = c_2 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases} \quad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, \text{ costanti}$$

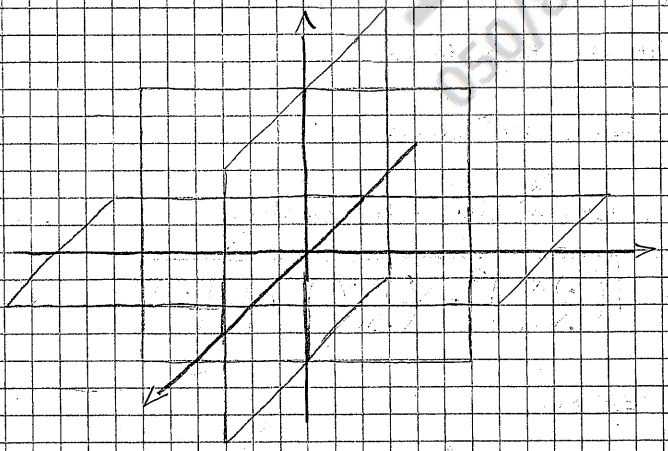
- LINEE COORDINATE: sono le rette ottenute intersecando 2 superfici coordinate e dove cambia una sola coordinata

$C_1 \cap C_2$ = lin. coord. di u_3

$C_2 \cap C_3$ = lin. coord. di u_1

$C_3 \cap C_1$ = lin. coord. di u_2

- esempio: nel sistema cartesiano quadriassi piano // di piani $x=0$, $y=0$, $z=0$ → è una superficie coordinata → non // a tutti e 3 contemporaneamente (ovviamente)



si definiscono poi i VERSORI FONDAMENTALI $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ relativi a un generico punto $P = (u_1, u_2, u_3)$

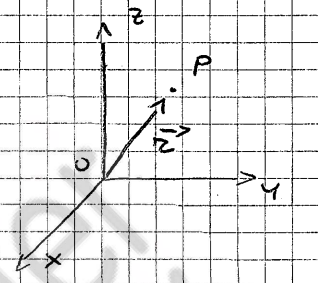
↳ sono i versori tangenti alle 3 linee coordinate passanti in P

Oss: diversamente dai versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ che sono costanti, $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ variano da punto a punto

↳ perciò scriveremo $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ e $\hat{u}_3$ in funzione di $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

scriviamo le coordinate cartesiane in funzione di quelle curvilinee

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$



un generico vettore $\vec{r}$ sarà:

$$\vec{r} = x(u_1, u_2, u_3)\,\hat{i} + y(u_1, u_2, u_3)\,\hat{j} + z(u_1, u_2, u_3)\,\hat{k}$$

differenziando si ha:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$$

risulta che i vettori

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

sono tangenti alla i-esima linea coordinata e che:

$$h_i \hat{u}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

dove h_i è un coefficiente metrico

↳ adesso posso riscrivere $d\vec{r}$ come

$$d\vec{r} = h_1 \hat{u}_1 du_1 + h_2 \hat{u}_2 du_2 + h_3 \hat{u}_3 du_3$$

$$h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}$$

- SPOSTAMENTI INFINITESIMI

Se si incrementa la coordinata u_i di un infinitesimo du_i, senza variare le altre due coordinate, il punto P si sposterà di un arco ds_i

↳ questo arco ds_i è in generale

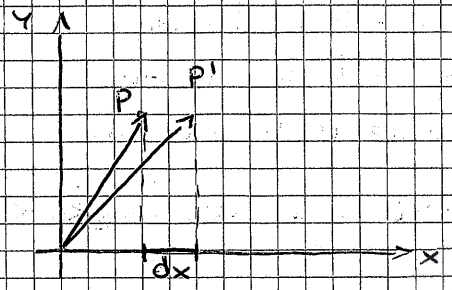
$$ds_i \neq du_i$$ (siamo in un sistema curvilineo)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 328 9837745

è differente da come accade per un sistema cartesiano

cioè: • in un sistema cartesiano se ho
$P = (x, y, z)$ e gli do un incremento dx

$\Rightarrow P' = (x+dx, y, z)$, $(z=0)$

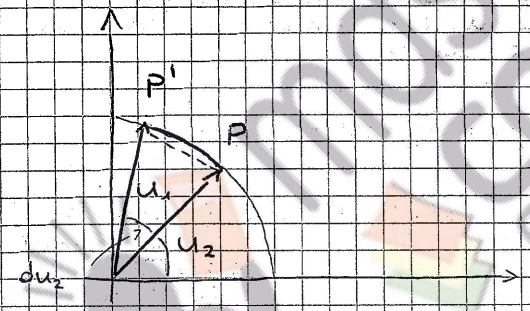


tale dx risulta uguale allo spostamento ds del punto P

$\Rightarrow ds = dx$

• in un sistema curvilineo se ho
$P = (u_1, u_2, u_3)$ e gli do un incremento du_1

$\Rightarrow P' = (u_1, u_2 + du_2, u_3)$, $(u_3 = 0)$



come si vede dalla figura

$du_2 \neq ds_2$

in generale risulta che:

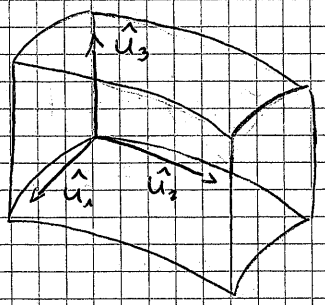
$ds_i = h_i du_i$, $i = 1,2,3$

dove ds_i è detto ARCO ELEMENTARE

(

i 3 archi elementari ds_1, ds_2, ds_3 individuano una CELLA ELEMENTARE di cui essi formano i 3 spigoli

o PARALLELEPIPEDO



sarà quindi:

$$||d\vec{r}|| = ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2} =$$
$$= \sqrt{h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2}$$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

che non è altro che la diagonale del parallelepipedo elementare

↓

le facce del parallelepipedo si trovano dS_i: si trovano dai prodotti tra gli spigoli ds_i (base × altezza!)

$$\begin{cases} dS_1 = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 \, du_2 du_3 \\ dS_2 = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 \, du_1 du_3 \\ dS_3 = ds_2 ds_1 = h_2 h_1 \, du_2 du_1 \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

dove la faccia dS_i è $\perp$ allo spigolo ds_i

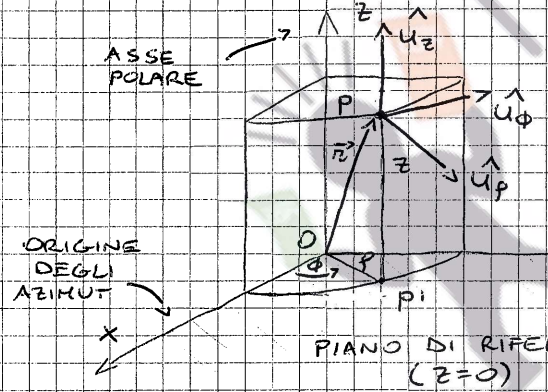
↓

il volume della cella elementare è banalmente:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$$

da ciò che abbiamo ricavato ora, possiamo introdurre 2 sistemi di coordinate curvilinee che ci saranno molto utili

- SISTEMI DI COORDINATE CILINDRICHE



$u_1 = \rho$, distanza di P dall'asse polare (asse z) $\rho = |\vec{OP_1}|$, con P_1 proiezione di P su piano di riferimento ($z=0$)

$u_2 = \phi$, (AZIMUT): angolo in radianti che $\vec{OP_1}$ forma con l'origine degli azimut (asse x) in senso antiorario

$u_3 = z$, è l'omonima coordinata cartesiana

(ρ, ϕ, z)

- formule per il cambiamento di coordinate:

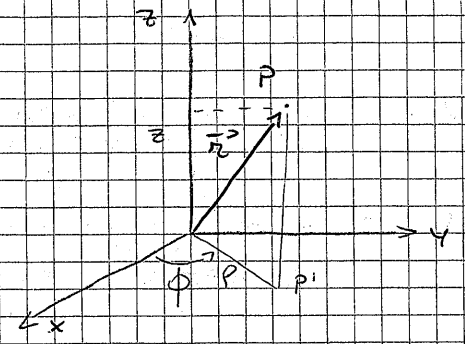
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & , \rho \geq 0 \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = z & , z \geq 0 \end{cases}$$

si vedono bene dalla figura

- trasformazioni inverse:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases}$$

Troviamo ora i VERSORI in un punto P:



$$\vec{r} = \rho\cos\phi\,\hat{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j} + z\hat{k}$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz =$$

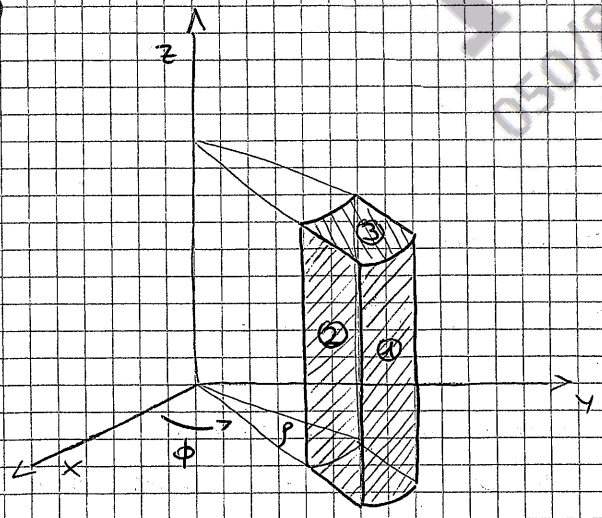
$$= (\cos\phi\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j} + 0)\,d\rho + (-\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{i} + \rho\cos\phi\,\hat{j} + 0)\,d\phi +$$
$$+ \hat{k}\,dz =$$
$$= (\cos\phi\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j})\,d\rho + \rho(-\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j})\,d\phi + \hat{k}\,dz$$

perciò otteniamo i

VERSORI:
$$\begin{cases} \hat{u}_\rho = \cos\phi\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j} \\ \hat{u}_\phi = -\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j} \\ \hat{u}_z = \hat{k} \end{cases}$$

COEFFICIENTI METRICI:
$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = \rho \\ h_3 = 1 \end{cases}$$

adesso possiamo individuare le superfici e il volume di una cella elementare



① $dS_\rho = \rho\,d\phi\,dz$

② $dS_\phi = d\rho\,dz$

③ $dS_z = \rho\,d\rho\,d\phi$

$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

www.cisom.it 050/8311726 388/9837745 COPISTERIA