MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Legge di Coulomb

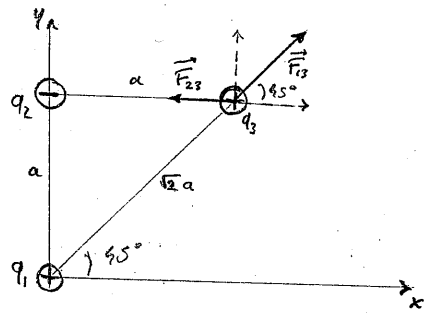
$$F_{elettrica} = K \cdot \frac{|q_1||q_2|}{z^2}$$

K = costante di coulomb = $8.987 \times 10^9 \ N \cdot \frac{m^2}{C^2}$

$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\quad \varepsilon_0$ = costante dielettrica del vuoto = $8{,}854 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

ESERCIZIO

Si consideri tre cariche puntiformi poste ai vertici di un triangolo rettangolo, dove $q_1 = q_3 = 5.0 \ \mu C$, $q_2 = -2.0 \ \mu C$ e $a = 0.10 \ m$. Si trovi la forza risultante su q_2.



$$\vec{F}_{23} = K \frac{|q_2||q_3|}{a^2} = 9 \ N \rightarrow F_{23x} = 9 \ N, \quad F_{23y} = 0 \ N$$

$$\vec{F}_{13} = K \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2}a)^2} = 11 \ N \rightarrow F_{13x} = F_{13} \cdot \cos 45° = 7{,}9 \ N, \quad F_{13y} = F_{13} \cdot \text{sen } 45° = 7{,}9 \ N$$

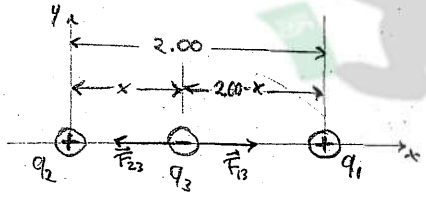
$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23y} = 7{,}9 + (-9) = -1{,}1 \ N$$

$$F_{3y} = F_{13x} + F_{13y} = 7{,}9 + 0 = 7{,}9 \ N$$

$$F_3 = (F_{3x}, F_{3y}) = (-1{,}1, 7{,}9) \ N$$

ESERCIZIO

Tre cariche puntiformi giacciono lungo l'asse x. La carica positiva $q_1 = 15.0 \ \mu C$ si trova in $x = 2.00 \ m$, la carica positiva $q_2 = 6.00 \ \mu C$ si trova nell'origine e la forza risultante sulla carica q_2 è nulla. Qual è la posizione x di q_3?



$$F_3 = F_{23} + F_{13} = -K \frac{|q_2||q_3|}{x^2} + K \frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2} = 0$$

$$K \frac{|q_2||q_3|}{x^2} = K \frac{|q_1||q_3|}{(2.00-x)^2} \rightarrow (2.00-x)^2 |q_2| = x^2 |q_1|$$

$$(4 - 4x + x^2)(6 \times 10^{-6}) = x^2 (15 \times 10^{-6})$$

$$3x^2 + 8x - 8 = 0 \Rightarrow x = 0{,}775$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Campo elettrico →

Si dice che esiste un campo elettrico nella regione di spazio che circonda una carica elettrica detta sorgente del campo. Quando un'altra carica detta "di prova" entra nel campo subisce una forza elettrica

$$\vec{E} = \frac{F_e}{q_0}$$

q_0 → carica di prova

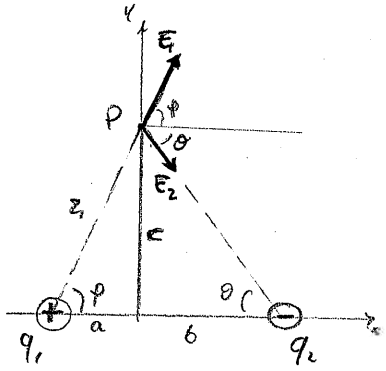
$[N/C]$ → Newton / Coulomb

se $F_e = k\frac{q \cdot q_0}{r^2} \longrightarrow E = k\frac{q}{r^2}$

Per il campo elettrico generato da un insieme di cariche puntiformi → $E = k\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}$

ESERCIZIO

Si trovino le componenti del campo elettrico risultante nel punto P sull'asse y



$$E_1 = k\cdot\frac{q_1}{z^2} = k\cdot\frac{|q_1|}{\sqrt{a^2+c^2}^2} = k\frac{|q_1|}{(a^2+c^2)}$$

$$E_2 = k\cdot\frac{q_2}{b^2+c^2}$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = k\frac{|q_1|}{(a^2+c^2)}\cdot\cos\varphi + k\frac{|q_2|}{b^2+c^2}\cdot\cos\theta$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = k\frac{|q_1|}{a^2+c^2}\operatorname{sen}\varphi + k\frac{|q_2|}{b^2+c^2}\operatorname{sen}\theta$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica

$$E = k\int\frac{dq}{r^2}$$

Se una carica Q è uniformemente distribuita lungo una linea di lunghezza ℓ la DENSITÀ DI CARICA λ:

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

Se una carica Q è uniformemente distribuita lungo una superficie di area A la DENSITÀ DI CARICA σ:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Se una carica Q è uniformemente distribuita in un volume V la DENSITÀ DI CARICA ρ:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

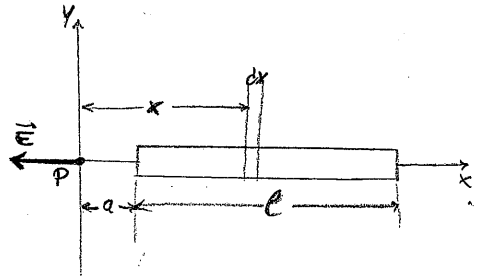
Se la carica è distribuita in maniera non uniforme, le densità di carica devono essere espresse come:

$dq = \rho\, dV$ | $dq = \sigma\, dA$ | $dq = \lambda\cdot d\ell$

ESERCIZIO

Una bacchetta di lunghezza ℓ ha una carica totale Q positiva uniformemente distribuita con densità λ.

Si calcoli il campo elettrico in un punto P lungo la retta su cui giace la bacchetta ad una distanza a da un estremo



$dq = \lambda \cdot dx$

$Q = \lambda \cdot \ell \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{Q}{\ell}}$

$dE = K \cdot \frac{dq}{x^2} = K \cdot \frac{\lambda\, dx}{x^2}$

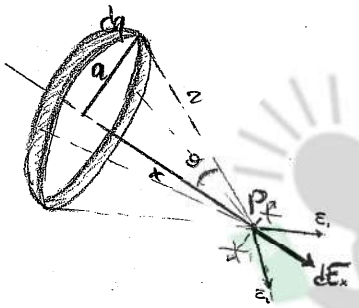
$E = \int_a^{\ell+a} K \cdot \lambda \cdot \frac{dx}{x^2} = K\lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = K\lambda \left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a}$

$E = K \cdot \frac{Q}{\ell}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell+a}\right) = \frac{K \cdot Q}{a(\ell+a)}$

ESERCIZIO (?)

Un anello ha raggio a e ha una carica positiva Q uniformemente distribuita

Si calcoli il campo elettrico lungo l'asse dell'anello in un punto P a distanza x dal centro dell'anello



$dE_x = K \frac{dq}{z^2} \cdot \cos\theta = K \cdot \frac{dq}{(a^2+x^2)} \cos\theta =$

$\cos\theta = \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$K \cdot \frac{dq}{(a^2+x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \cdot dq$

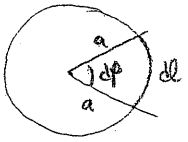
$E_x = \int \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} dq = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \int dq = \frac{Kx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \cdot Q$

$dq = \lambda \cdot dl$

$Q = \lambda \cdot 2\pi a$

(nel caso di un anello)

alternativamente (quaderno)



$dE_x = K \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{z^2} \cdot \cos\theta$

z = costante

θ = costante

$z = \sqrt{x^2+a^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$dE_x = K \cdot \lambda \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot dl$

$dl = a \cdot d\varphi$

$E_x = \int_0^{2\pi} K \cdot \lambda \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} a \cdot d\varphi = K \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot a \cdot \lambda \cdot 2\pi$

Se prendiamo l'ipotesi $a \gg x$ (punto sull'asse molto vicino all'anello)

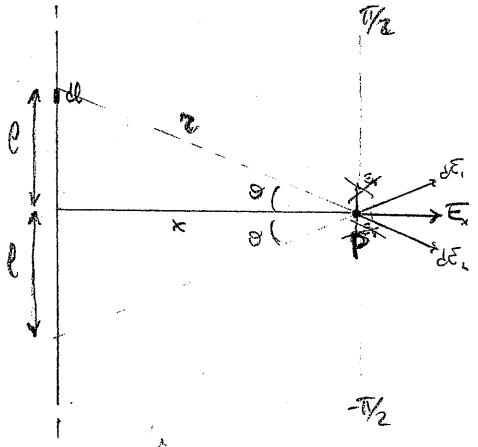
Possiamo approssimare l'espressione a: $E_x = \frac{K \cdot Q}{a^3} x = \frac{K \cdot 2\pi \cdot \lambda \cdot x}{a^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESERCIZIO

Un filo rettilineo indefinito ha densità di carica λ

Calcolare il campo elettrico in un punto P a distanza x dal filo



$$dE_1 = dE_2 = k \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2}$$

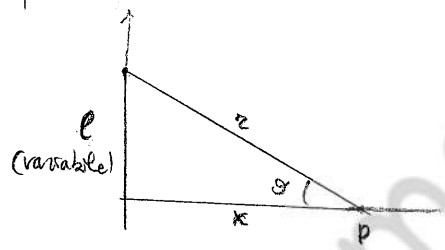
$$dE = 2k \cdot \frac{\lambda\, dl}{r^2} \cos\theta$$ derivata $tg\,\theta$

$$\boxed{l = x\, tg\,\theta} \rightarrow \boxed{dl} = x \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$r\cos\theta = x \rightarrow \boxed{r = \frac{x}{\cos\theta}}$$

$$dE = 2k\lambda \cdot \frac{x}{\cos^2\theta}\, d\theta \cdot \frac{\cos^2\theta}{x^2} \cdot \cos\theta$$

$$= 2k\lambda \cdot \frac{\cos\theta}{x}\, d\theta$$



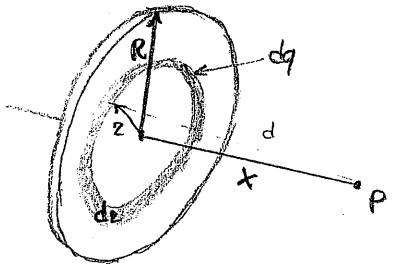
$$E = \int_0^{\pi/2} dE = \int_0^{\pi/2} 2k\lambda \frac{\cos\theta}{x}\, d\theta$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot x}$$

ESERCIZIO

Un disco di raggio R ha una densità superficiale di carica σ uniforme

Si calcoli il campo elettrico in un punto P sull'asse del disco ad una distanza x dal centro



anello raggio z, spessore dz

$$dq = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot 2\pi z\, dz$$

$$dE_x = k \cdot \frac{x \cdot \sigma}{(z^2+x^2)^{3/2}} 2\pi z\, dz$$

→ ci siamo ricondotti al caso dell'anello con densità di carica espandendo il tutto ad un disco carico

$$E = k x \sigma \int_0^R \frac{2z\, dz}{(z^2+x^2)^{3/2}} =$$

$$= k x \sigma \left[\frac{(z^2+x^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = 2\pi k \sigma \left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

Se prendiamo l'ipotesi $R \gg x$ (punto sull'asse molto vicino al disco) possiamo approssimare l'espressione a: $E_x = 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Legge di Gauss

Linee di flusso dall'interno verso l'esterno → flusso positivo

Linee di flusso dall'esterno verso l'interno → flusso negativo

Linee di flusso parallele alla superficie → flusso nullo

Flusso elettrico $\Phi_e = E \cdot A \cdot \cos\theta$

Flusso elettrico con campo elettrico non uniforme $\Phi_e = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (prodotto scalare!! $E \cdot \cos\theta \, dA$)

Il flusso totale attraverso una qualunque superficie chiusa che racchiude una carica puntiforme q è uguale a $\frac{q}{\varepsilon_0}$ ed è indipendente dalla forma della superficie

Il flusso totale che attraversa una superficie chiusa che non racchiude nessuna carica è nullo

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

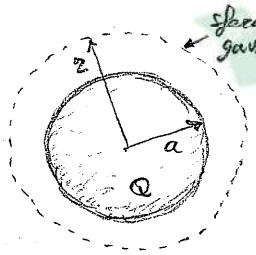
La Legge di Gauss è usata per calcolare il campo elettrico generato da distribuzioni di carica con simmetria sferica, cilindrica o piana, di modo che E, preso costante, può essere portato fuori dall'integrale

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESERCIZIO

Una sfera isolante di raggio a possiede una densità di carica di volume uniforme ρ e la carica totale è Q

Si calcoli l'intensità del campo elettrico in un punto all'ESTERNO della sfera.



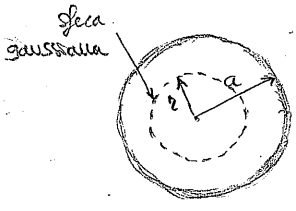
In una sfera posso togliere il prodotto scalare

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (\text{per } r > a)$$

Per una sfera uniformemente carica, il campo nella regione esterna è equivalente a quello generato da una carica puntiforme posta al centro della sfera

Si calcoli l'intensità del campo elettrico in un punto all'INTERNO della sfera



$$q_{in} = \rho \cdot V_{in} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint E \cdot dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_{in}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot r}{3\varepsilon_0}$$

$$Q = \rho \cdot V_{tot} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot r}{3\varepsilon_0} = k \cdot \frac{Q}{a^3} \cdot r \quad (\text{per } r < a)$$

