master COPY

Testo n. 0 - Cognome e Nome:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
INGEGNERIA GESTIONALE: CORSO DI FISICA GENERALE II
Prova n. 1 - 27/10/2018

Negli esercizi seguenti le coordinate polari sferiche vengono indicate con i simboli r,θ,ϕ, dove r è la distanza dall'origine O, *θ è l'angolo polare (colatitudine) e ϕ è l'azimut; le coordinate cilindriche vengono indicate con i simboli ρ,ϕ,z, dove ρ è la distanza dall'asse polare, ϕ è l'azimut e z è la quota; le coordinate cartesiane vengono indicate con i simboli x,y,z. Quando più tipi di coordinate sono usati nello stesso esercizio, salvo avviso contrario i diversi sistemi sono associati nel modo usuale: origini coincidenti, assi polari coincidenti tra loro e coincidenti con l'asse z, origine degli azimut coincidente con il semiasse $x > 0$, ecc.*

1) In un sistema di coordinate polari sferiche, una distribuzione volumetrica di carica elettrica ha densità $\rho = \rho_0 - kr$, con $\rho_0 = 2.52$ pC/m^3 e $k = 1.66$ pC/m^4. Determinare il raggio, in m, della sfera centrata nell'origine che contiene una carica complessivamente nulla. $Q = \int_V \rho dV = 0$

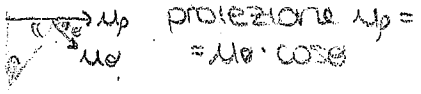
A [0] B [2.02] C [3.82] D [5.62] E [7.42] F [9.22]

2) Si consideri il seguente campo elettrostatico, dato in coordinate cilindriche: $E_\rho = k\rho/(\rho^2+z^2)^{3/2}$, $E_\phi = 0$, $E_z = 2h + kz/(\rho^2+z^2)^{3/2}$, dove $h = 1.57$ V/m, $k = 1.01$ V·m. Determinare la carica elettrica, in nC, presente nell'origine del sistema di coordinate. CILINDRICHE → SFERICHE

$\rho = r\sin\theta$
$z = r\cos\theta$
$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$

A [0] B [0.112] C [0.292] D [0.472] E [0.652] F [0.832]

3) Si consideri il punto P di coordinate cilindriche $\rho = 1.15$, $\phi = 1.98$ rad, $z = 1.54$. Nel punto P determinare la proiezione del versore u_ρ delle linee coordinate ρ sul versore u_θ delle linee coordinate θ.

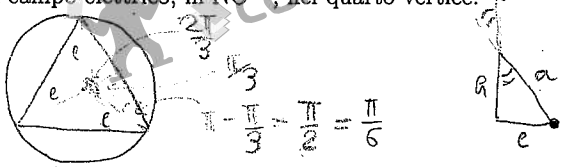


A [0] B [0.261] C [0.441] D [0.621] E [0.801] F [0.981]

4) All'interno di un cilindro di raggio $R = 1.72$ m e altezza $h = 1.88$ m, è presente una distribuzione volumetrica di carica elettrica con densità dipendente dalla distanza dall'asse del cilindro e dall'azimut, definito scegliendo come asse polare l'asse del cilindro, secondo la seguente legge $\rho_c = k\rho\cos(\phi)$ con $k = 1.36$ μC/m^4. Considerando separatamente la carica positiva e quella negativa all'interno del cilindro, determinare la carica positiva, in μC, complessivamente presente dentro al cilindro.

A [0] B [1.47] C [3.27] D [5.07] E [6.87] F [8.67]

5) Su tre vertici di un tetraedro regolare di spigolo di lunghezza $a = 10.1 \times 10^{-3}$ m è presente una carica elettrica puntiforme $q = 1.93$ pC. Determinare il modulo del campo elettrico, in NC^{-1}, nel quarto vertice.



A [0] B [237] C [417] D [597] E [777] F [957]

master COPY

può essere $z \geq 0$ o $z \leq 0$ ↑E_z ↓E_z

6) In un sistema di coordinate polari cilindriche, è dato il seguente campo elettrico: $E_\rho = -h/\rho$, $E_\phi = 0$, $E_z = kz$ dove $h = 1.50$ V e $k = 1.70$ V/m^2. Si consideri la distribuzione di carica che genera un tale campo e un cilindro non degenere avente per asse proprio l'asse z. Determinare il raggio, in m, di un tale cilindro che contenga complessivamente una carica nulla.

$\rho > 0$ sempre

A [0] B [1.33] C [3.13] D [4.93] E [6.73] F [8.53]

7) All'interno di una sfera di raggio $r_0 = 1.02$ m è data una densità volumetrica di carica elettrica $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{r_0^2}$ dove r è la distanza dal centro della sfera e $\rho_0 = 1.97$ C/m^3. Determinare il valore della densità superficiale di carica σ uniforme, in C/m^2, da disporre sulla superficie della sfera affinchè il campo elettrico esterno alla sfera risulti nullo.

A [0] B [−0.222] C [−0.402] D [−0.582] E [−0.762] F [−0.942]

8) Fissati un sistema di coordinate cartesiane e un corrispondente sistema di coordinate cilindriche, nel punto di coordinate cartesiane (1,1,1) è dato il vettore $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ con componenti cartesiane $v_x = 1.11$, $v_y = 1.28$, $v_z = 1.89$. Determinare la componente radiale v_ρ del vettore $\mathbf{v}$.

A [0] B [1.69] C [3.49] D [5.29] E [7.09] F [8.89] $v_\rho = \vec{v} \cdot \hat{u}_\rho$

9) In un sistema di coordinate sferiche, nella regione individuata dalla relazione $R_i \leq r \leq R_e$, con $R_i = 1.41$ m e $R_e = 2.97$ m, è data una densità volumetrica di carica elettrica $\rho_c(r) = a + br$, con $a = 1.21$ nC/m^3 e $b = 1.44$ nC/m^4. Determinare il modulo del campo elettrico, in NC^{-1}, alla distanza $r = 3.21$ m dall'origine del sistema di riferimento.

A [0] B [215] C [395] D [575] E [755] F [935]

10) In un sistema di coordinate polari sferico, nella regione individuata dalle relazioni $r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, con $r_0 = 1.92$ m, è data una distribuzione volumetrica con densità uniforme $\rho_0 = 1.12$ nC/m^3. Calcolare il modulo del campo elettrico, in NC^{-1}, nell'origine del sistema di riferimento.

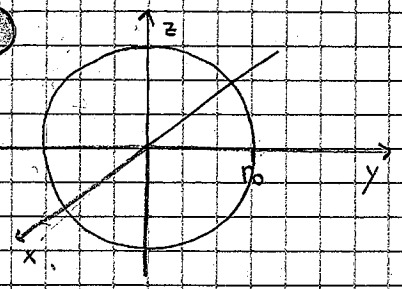
A [0] B [24.9] C [42.9] D [60.9] E [78.9] F [96.9]

Testo n. 0

master COPY

29/10/18 - 1° COMPITINO GESTIONALE

1



$$Q(r_0) = \int_V \rho \, dV = 0$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} (\rho_0 - kr)\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^{r_0} \rho_0 r^2 - k r^3 \, dr$$

$$= 4\pi \left| \rho_0 \frac{r^3}{3} - k \frac{r^4}{4} \right|_0^{r_0} =$$

$$= 4\pi \left(\rho_0 \frac{r_0^3}{3} - k \frac{r_0^4}{4} \right) = 0$$

$$= \frac{\rho_0}{3} - k \frac{r_0}{4} = 0$$

$$r_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_0}{k}$$

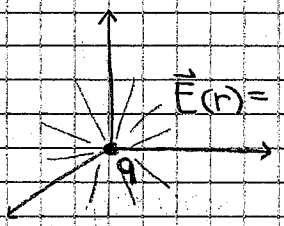
master COPY

2

$$E_\rho = \frac{k\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

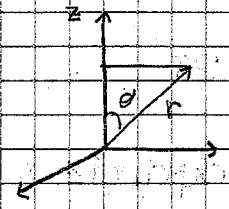
$$E_\phi = 0$$

$$E_z = 2\pi k + \frac{k z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$



$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

passo da coordinate cilindriche a sferiche



$$\rho = r\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r = (\rho^2+z^2)^{1/2}$$

e trovo:

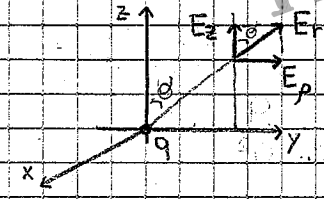
$$E_z = 2\pi k + \frac{k r \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\rho = \frac{k r \sin\theta}{r^3}$$

$$E_\phi = 0$$

potevo confondere ma è un piano PERCHÉ COMUNQUE DEVONO ESSERE UGUALI E_z E E_ρ E CAMBIA SOLO $\sin/\cos$

SONO DOVUTI A UNA CARICA ELETTRICA NELL'ORIGINE P.S.



$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

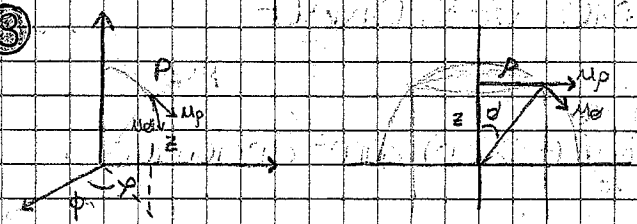
$$E_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \sin\theta$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos\theta$$

anche ho: $\frac{k\rho\sin\theta}{\rho^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\rho^2} \sin\theta$

$$q = 4\pi\varepsilon_0 k$$

③



È COME DIRE:
$\mu_{P//} = |\mu_P| \cdot \cos\theta = 1 \cdot \cos\theta$

$\hat{\mu}_P = \cos\varphi\hat{\imath} + \text{sen}\varphi\hat{\jmath}$

$\hat{\mu}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\hat{\imath} + \cos\theta\,\text{sen}\varphi\hat{\jmath} - \text{sen}\theta\hat{k}$

c'è solo da fare il prodotto scalare tra i due vettori

$\hat{\mu}_P \cdot \hat{\mu}_\theta = (\cos\varphi\hat{\imath} + \text{sen}\varphi\hat{\jmath})(\cos\theta\cos\varphi\hat{\imath} + \cos\theta\,\text{sen}\varphi\hat{\jmath} - \text{sen}\theta\hat{k})$

$= \cos\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\,\text{sen}^2\varphi$

$= \cos\theta(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi)$

$= \cos\theta$

NB: $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1$ // $\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$ //
$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$ ⊥ $\hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$ ⊥
$\hat{\imath}\cdot\hat{k} = 0$ ⊥ $\hat{k}\cdot\hat{k} = 0$ ⊥

dove si ha che $z = r\cdot\cos\theta$

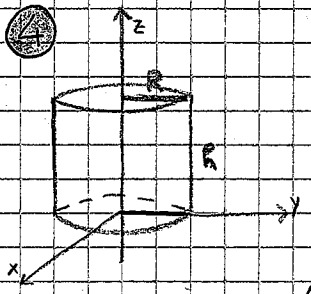
$\cos\theta = \dfrac{z}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$

! PERCHÈ FACENDO IL PRODOTTO SCALARE TRA I DUE TROVO LA PROIEZIONE DI μ_P SU μ_θ? PERCHÈ HANNO MODULO 1? È dato che hanno uguale modulo la proiezione di uno sull'altro è uguale?

dunque la proiezione di $\hat{\mu}_P$ su $\hat{\mu}_\theta$ è $\dfrac{z}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$

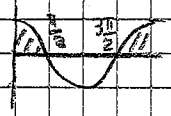
---

④



$\rho_c = k\rho\cos\varphi$

la carica è positiva se $\rho_c > 0$



$k\rho\cos\varphi > 0$

$\cos\varphi > 0$

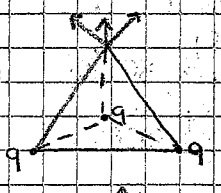
$0 < \varphi < \pi/2 \cup 3\pi/2 < \varphi < 2\pi$

$Q^+ = \int_0^h\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\rho\cos\varphi\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz + \int_0^h\int_0^R\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} k\rho\cos\varphi\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz$

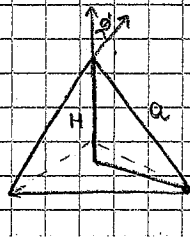
$= k\pi h\int_0^R \rho^2 d\rho + k\pi h\int_0^R \rho^2 d\rho = 2k\pi h\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}k\pi hR^3$

---

⑤



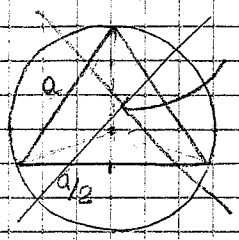
$E_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2}$

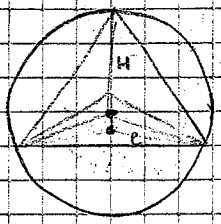


$E_{TOT} = 3\cdot\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2}\cos\theta$

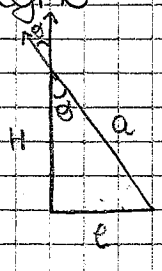
NB: c'è solo componente verticale per simmetria (le componenti orizzontali si annullano tra di loro)

Bisogna trovare l'angolo: basta fare bene il disegno

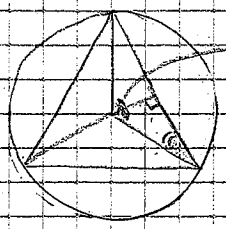




No! perché $H \neq e$



ESSENDO UNA PIRAMIDE REGOLARE L'ALTEZZA CADE NEL CENTRO DELLA CIRCONF INSCRITTA NEL TRIANGOLO EQUILATERO DI BASE



$\frac{2\pi}{3}$, quindi base $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\frac{a}{2} = e \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

$e = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3}a = \frac{\sqrt{6}}{3} a$

$H = \cos\theta \cdot a$

$\cos\theta = \frac{H}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} a / a = \frac{\sqrt{6}}{3}$

master COPY

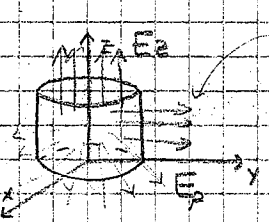
qunque ho: $E_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 6$

⑥ $E_\rho = \frac{\rho}{\rho}$

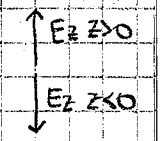
$E_\phi = 0$

$E_z = kz$

ORIGINE DI $\vec{E}$: $z = 0$, $\rho < R$, $\rho = R$



LINEE DI FORZA



tale che $q_{TOT} = 0$

supponiamo sia alto z_0

Gauss: $E \cdot dS = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = 0$

$= \int \vec{E}_\rho d\vec{S}_\rho + \int \vec{E}_\rho \cdot d\vec{S}_z + \int \vec{E}_z d\vec{S}_z + \int \vec{E}_z dS_\rho$

($\vec{E}_\rho \perp d\vec{S}_z$, $\vec{E}_z \perp d\vec{S}_\rho$)

$\Phi_{S,CHIUSA}(\vec{E}) = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E_\rho dS_\rho + \int E_z dS_z$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{z_0} E_\rho \cdot \rho \cdot d\phi dz + \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho_0} E_z \cdot \rho \cdot d\phi d\rho = 0$

$\rho_0 \cdot 2\pi \left(-\frac{\rho}{\rho}\right) z_0 = 2\pi k z_0 \frac{\rho_0^2}{2}$ $\quad \rho_0 = \sqrt{\frac{2\rho}{k}}$