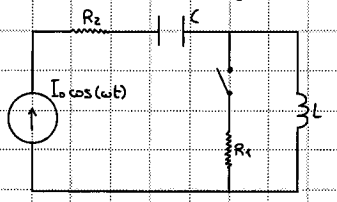
Compitini marzo

(1) Nel circuito in figura abbiamo $C = 5L/R_1^2$, $R_2 = \frac{3}{2}R_1$, $L = 63.1\,\mu H$, $R_1 = 14.0\,\Omega$ e $I_0 = 21.2$ mA. La pulsazione del generatore è pari a quella della risonanza con l'interruttore chiuso. Determinare la potenza media erogata dal generatore a regime con interruttore aperto.



Siamo in condizione di risonanza, perciò:

$$W_L + W_C = 0$$

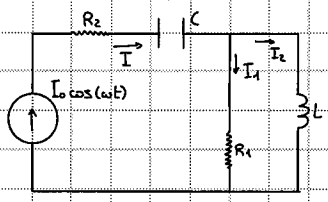
e quindi

$$W_G = W_R$$

ed in particolare:

$$W_G^{(m)} = \langle W_R \rangle = \frac{1}{2} R_2 I_0^2 = 4.72\ mW$$

(2) Nel caso precedente si calcoli la pulsazione del generatore.



Scriviamo le equazioni di maglia:

$$\begin{cases} \hat{V}_G = \hat{V}_{R_2} + \hat{V}_C + \hat{V}_{R_1} \\ \hat{V}_{R_1} = \hat{V}_L \Rightarrow \hat{I}_2\, j\omega L = \hat{I}_1 R_1 \end{cases}$$

da cui:

$$\hat{V}_G = R_2\hat{I} + \frac{1}{j\omega C}\hat{I} + R_1\hat{I}_1$$

Possiamo dire inoltre:

$$\hat{I}_2 + \hat{I}_1 = \hat{I} \Rightarrow \hat{I}_1 = \frac{\hat{I}}{1 + \frac{R_1}{j\omega L}}$$

e quindi:

$$\hat{V}_G = R_2\hat{I} + \frac{1}{j\omega C}\hat{I} + R_1\frac{\hat{I}}{1 + \frac{R_1}{j\omega L}} = \left(R_2 - \frac{1}{\omega C}j + \frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{j\omega L}}\right)\hat{I}$$

Imponendo che lo sfasamento sia nullo:

$$\mathrm{Im}\left(\hat{V}_G/\hat{I}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\omega C} + \frac{R_1^2\,\omega L}{\omega^2 L^2 + R_1^2} = 0 \Rightarrow 4\omega^2 L^2 - R_1^2 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{R_1}{2L} = 1.11 \times 10^5$$

(3) Se nel circuito del problema (1) si chiude l'interruttore si calcoli la potenza media dissipata per effetto Joule.

La potenza media dissipata per effetto Joule è uguale a quella erogata:

$$W_m = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{1}{2} I_0^2 \left(R_2 + \frac{R_1\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R_1^2}\right) = 5.35\ mW$$

(4) Nella situazione precedente si calcoli la potenza dissipata subito dopo la chiusura dell'interruttore.

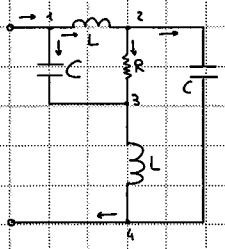
Per la presenza dell'induttanza:

$I_1(t=0) = 0$

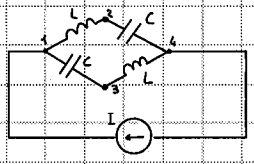
e quindi:

$W_J = I_0^2 R_1 = 9.44\ mW$

(5) Sono dati $R = 11.0\ \Omega$, $L = 1.55 \times 10^{-6}\ H$, e $C = 1.80 \times 10^{-5}\ F$. Si determini il modulo dell'ammettenza (inverso dell'impedenza) equivalente del bipolo per $\omega = 1/\sqrt{LC}$



Supponiamo di connettere i due terminali ad un generatore di corrente alternata $\hat{I}$, quindi calcoliamo l'impedenza Thevenin ai nodi 2 e 3:



$$\hat{Z}_{TH} = \frac{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}{2} = j\frac{1}{2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \leftarrow \text{NON POSSIAMO APPLICARE NORTON}$$

Applicando Thevenin:

$$\hat{V}_{TH} = \hat{V}_{C_1} - \hat{V}_{L_1} = -j\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)\frac{\hat{I}}{2} = -j\sqrt{L/C}\,\hat{I} \Rightarrow \hat{I}_R = -\frac{\hat{V}_{TH}}{R} = -j\frac{\sqrt{L/C}}{R}\hat{I}$$

Possiamo così ricavare la d.d.p ai capi del generatore:

- $I_{L_2} = I_R + I_{C_1}$
- $\hat{V} = \hat{V}_{C_1} + \hat{V}_{L_2} = j\omega L\,\hat{I}_{L_2} + \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_{C_1} = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\hat{I}_{C_1} + j\omega L\,\hat{I}_R = j\omega L\,\hat{I}_R = \frac{L}{RC}\hat{I}$

E quindi otteniamo:

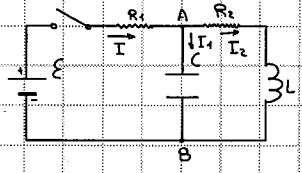
$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{L}{RC} \Rightarrow \hat{Y} = \frac{1}{\hat{Z}} = \frac{RC}{L} = 128\ \Omega^{-1}$$

NOTA UTILE: L'esercizio precedente poteva essere risolto senza Thevenin impostando:

- 3 equazioni di maglia
- 3 equazioni ai nodi

ovvero con un sistema di 6 equazioni → molto più lento. Controlla sempre quando puoi semplificare con i teoremi.

(6) Nel circuito di figura $R_2 = R_1 = 3.28\ \Omega$, $C = 8.30\ \mu F$, $L = R_1^2 C$ e $\mathcal{E} = 9.41\ V$. Si determini la potenza dissipata per effetto Joule subito dopo la chiusura dell'interruttore ($t=0$).



Per la presenza dell'induttanza si ha corrente iniziale nulla nella maglia di destra. Abbiamo perciò un circuito serie RC, ovvero:

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

e quindi:

$$W_R(0) = R_1 I^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} = 27.0\ W$$

(7) Nel circuito precedente determinare la potenza dissipata a regime.

A regime $I_1 = 0$, quindi abbiamo:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \Rightarrow W_J = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2} = 13.5\ W$$

(8) Determinare la corrente che attraversa l'induttore all'istante $t = \pi RC/2$.

Abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{C} I_1 = R\dot{I}_2 + L\ddot{I}_2 \\ I_1 + I_2 = I \\ R\dot{I} + \frac{1}{C} I_1 = 0 \Rightarrow R\dot{I}_1 + R\dot{I}_2 + \frac{1}{C} I_1 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$R\dot{I}_1 + R\dot{I}_2 = -R\dot{I}_2 - L\ddot{I}_2 \Rightarrow \dot{I}_1 = -\frac{L}{R}\ddot{I}_2 - 2\dot{I}_2$$

e quindi:

$$-\frac{L}{R}\ddot{I}_2 - 2\dot{I}_2 = RC\dddot{I}_2 + LC\ddot{I}_2 \Rightarrow R^2C^2\dddot{I}_2 + 2RC\ddot{I}_2 + 2\dot{I}_2 = 0$$

la cui equazione secolare è:

$$\tau^2\lambda^3 + 2\tau\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\quad \lambda_{2,3} = \frac{-\tau \pm \tau j}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\tau} j$$

Abbiamo quindi:

$$I_2(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(t/\tau) + C_3 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(t/\tau)$$

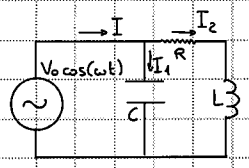
ed imponendo le c.i.:

- $C_1 + C_2 = 0$
- $C_1 = \mathcal{E}/2R \Rightarrow C_2 = -\mathcal{E}/2R$
- $R(C_1 + C_2) - \frac{L}{\tau^2}(C_2 - C_3) = 0 \Rightarrow C_2 = C_3$

ed abbiamo:

$$I_2(\pi RC/2) = \frac{\mathcal{E}}{2R}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = 1.14 \text{ A}$$

(9) Nel circuito in figura sono dati $V_0 = 100\text{V}$, $\omega = 320 \text{ rad s}^{-1}$, $L = 91.1 \text{ mH}$ e $R = \omega L$. Si calcoli la capacità C, sapendo che il generatore è in risonanza con il circuito



Abbiamo:

$$\tilde{V}_C = \tilde{V}_G \Rightarrow \frac{1}{C}\tilde{I}_1 = j\omega\tilde{V}_C \Rightarrow \hat{I}_1 = j\omega C\hat{V}_G \Rightarrow I_1 = \omega C V_0 \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega C V_0 \sin(\omega t)$$

Inoltre:

$$\tilde{V}_L + \tilde{V}_R = \tilde{V}_G \Rightarrow L\tilde{I}_2 + R\tilde{I}_2 = \tilde{V}_G \Rightarrow j\omega L\hat{I}_2 + R\hat{I}_2 = \hat{V}_G \Rightarrow \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}_G}{R+j\omega L} = \frac{\hat{V}_G}{\omega L(1+j)} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{\omega L\sqrt{2}}V_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Imponendo la condizione di risonanza:

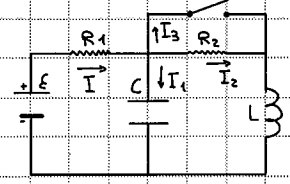
$$W_C + W_L = 0 \Rightarrow \cancel{\langle W_C\rangle} + \langle W_L\rangle - \omega C V_0^2 \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{V_0^2}{2\omega L}\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2\omega^2 L} = 53.6 \,\mu\text{F}$$

(10) Si calcoli la potenza media erogata dal generatore a regime.

Sappiamo:

$$\langle W_G\rangle = \langle W_R\rangle = \frac{1}{2}I_2^2 R = \frac{V_0^2}{4\omega L} = 85.8 \text{ W}$$

(11) Nel circuito in figura sono dati $R_1 = R_2 = R = 282\,\Omega$, $C = 155\,\mu\text{F}$, $L = 2R^2C$ e $\mathcal{E} = 1.61\text{ V}$. All'istante $t=0$, con il circuito già a regime, viene chiuso l'interruttore. Si determini l'istante in cui I_1 è massima.



A regime abbiamo:

$$I_1 = I_3 = 0 \Rightarrow I = I_2$$

perciò avremo una serie RL, con resistenza $2R$, a regime:

$$I_2 = I = \frac{\mathcal{E}}{2R}, \quad V_L = 0, \quad V_{R_1} = V_{R_2} = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

Chiudendo l'interruttore abbiamo le nuove equazioni:

$$\begin{cases} L\ddot{I}_3 = \frac{1}{C}I_1 \\ 0 = R\dot{I} + \frac{1}{C}I_1 \\ I = I_1 + I_3 \Rightarrow \ddot{I} = \ddot{I}_1 + \ddot{I}_3 = \ddot{I}_1 + \frac{1}{LC}I_1 = \ddot{I}_1 + \frac{1}{2R^2C^2}I_1 \end{cases}$$

da cui:

$$R\ddot{I}_1 + \frac{1}{2RC^2} I_1 + \frac{1}{C}\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow 2\tau^2\ddot{I}_1 + 2\tau\dot{I}_1 + I_1 \Rightarrow I_1 = e^{-\frac{t}{2\tau}}\left(C_1\cos(t/2\tau) + C_2\sin(t/2\tau)\right)$$

Ed abbiamo:

- $V_C(0) = \frac{\mathcal{E}}{2} = -V_L(0) \Rightarrow \dot{I}_3(0) = -\frac{\mathcal{E}}{2L}$
- $I_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
- $V_R + V_C = 0 \Rightarrow R\dot{I} = \frac{1}{C} I_1 \Rightarrow \dot{I}(0) = 0 \Rightarrow \dot{I}_1(0) = \frac{\mathcal{E}}{2L} = C_2$

abbiamo così le oscillazioni smorzate:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{4R} e^{-\frac{t}{2RC}} \sin(t/2RC)$$

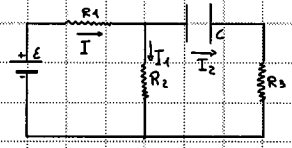
e quindi abbiamo massimo per:

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{4R^2C} e^{-\frac{t}{RC}}\left(\sin(t/2RC) - \cos(t/2RC)\right) \Rightarrow \sin(t/2RC) = \cos(t/2RC) \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}RC$$

Il t^* cercato è perciò:

$$t = \frac{\pi}{2}RC = 6.87 \text{ ms}.$$

(12) Sono dati: $\mathcal{E} = 4.55$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = R = 242\,\Omega$, $C = 26\,\mu$F. Si calcoli l'energia immagazzinata a regime nel condensatore.



A regime abbiamo:

- $I_2 = 0 \Rightarrow V_3 = 0 \Rightarrow V_C = V_2$
- $I_1 = I \Rightarrow V_2 = V_1 = \frac{\mathcal{E}}{2} \Rightarrow V_C = \frac{\mathcal{E}}{2} \Rightarrow U_C = \frac{1}{2}C\frac{\mathcal{E}^2}{4} = \frac{1}{8}C\mathcal{E}^2 = 6.75\times10^{-4}$ J

(13) Si calcoli il tempo di carica del condensatore, ovvero il tempo impiegato a raggiungere una frazione $(1-\frac{1}{e})$ del suo valore della d.d.p. a regime.

Abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{C}I_2 + R\dot{I}_2 = R\dot{I}_1 \\ R\dot{I}_1 + R\dot{I} = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 + \dot{I} = 0 \Rightarrow 2\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = -\frac{1}{2}\dot{I}_2 \\ I_1 + I_2 = I \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{1}{C}I_2 + R\dot{I}_2 = -\frac{R}{2}\dot{I}_2 \Rightarrow \frac{3}{2}\tau\dot{I}_2 + I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = C_1 e^{-\frac{2t}{3\tau}} \Rightarrow Q_C = -\frac{2C_1}{3\tau}e^{-\frac{2t}{3\tau}} + C_2$$