Teoremi con dimostrazione di Analisi matematica 1

Capitolo 0: Preliminari

- logica: connettivi, quantificatori, negazioni di proposizioni, concetto di uguaglianza
- insiemi: concetto di appartenenza, contenuto, unione, intersezione, differenza e complementare, formule di De Morgan
- matematica elementare: valore assoluto, radicali, equazioni e disequazioni, esponenziali e logaritmi, trigonometria, geometria analitica del piano
- applicazioni: grafico e immagine, applicazioni suriettive, iniettive, bigettive, corrispondenza biunivoca tra insiemi, applicazioni composte, funzioni pari, dispari, periodiche

FANTASMI
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Capitolo 1: numeri

classe numerica, naturali $\mathbb{N}$, interi relativi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$, reali $\mathbb{R}$.
Reali e razionali come allineamenti decimali finiti o periodici, reali irrazionali come allineamenti decimali non periodici con infinite cifre dopo la virgola.

- proprietà dei reali: densità dei razionali e degli irrazionali in $\mathbb{R}$, completezza di $\mathbb{R}$, esistenza della radice n-ma di un numero reale non negativo, massimi e minimi, insiemi inferiormente e superiormente limitati, estremo superiore e inferiore

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Teorema di esistenza e unicità:

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$ allora esiste ed è unico l'estremo superiore di A

hp $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$

th: esiste ed è unico $\sup(A)$.

1° caso: sia A superiormente limitato

dim esistenza: sia $B = \{\text{maggioranti di } A\}$, $B \neq 0$

A e B soddisfano le hp. del teorema di completezza:

per tale teorema esiste un elemento separatore L

$L \geq a \ \forall a \in A$, (L è maggiorante di A)

$L \leq b \ \forall b \in B$, (L è minimo dei maggioranti)

quindi per def è estremo superiore

dim. unicità: supponga che esistano almeno due estremi superiori L_1 e L_2 con $L_1 < L_2$

L_1 è maggiorante di A

essendo $L_2 > L_1$ è assurdo che L_2 sia il minimo dei maggioranti.

2° caso: sia A non superiormente limitato,
per def. di estremo superiore di $A = +\infty$
allora esiste ed è unico. c.v.d.

proprietà dell'estremo superiore e inferiore

- Capitolo 2: spazi metrici: definizione di distanza, distanza pitagorica in $\mathbb{R}^n$, diametro di un insieme e distanza fra due insiemi, concetto di palla, intorno, punto aderente, d'accumulazione, isolato;

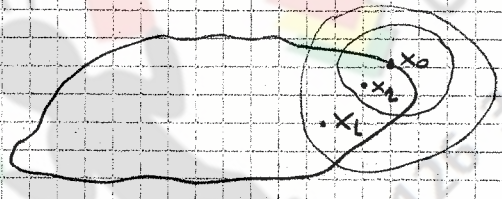
Teorema:

x_0 è d'accumulazione per $A \iff$ in ogni intorno di x_0 ci sono infiniti elementi di A.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

dim. $\Leftarrow$
sia U un qualsiasi intorno di x_0,
per hp. in U ci sono infiniti elementi di A,
allora $\exists$ almeno un elemento di $A \neq x_0$ in U
quindi x_0 è d'accumulazione

dim. $\Rightarrow$
sia U un qualsiasi intorno di x_0



per hp. $\exists x_1 \neq x_0$ e $x_1 \in A \cap U$
prendo una palla $S_1 \subset U \setminus x_1 \in S_1$
per hp. $\exists\ x_2 \neq x_0$ e $x_2 \in S_1 \cap A$
prendo $S_2 \subset S_1 \setminus x_3 \in S_2$
e così via;
i punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono punti di A che stanno nell'intorno U, quindi U contiene infiniti elementi di A. c.v.d

Teorema di Bolzano - Weierstrass,
punti interni, esterni, di frontiera, insiemi aperti e chiusi

Teorema della frontiera

A è aperto $\iff$ A non contiene alcun punto di frontiera
dim. A è aperto $\Rightarrow$ A non contiene alcun punto di frontiera
hp. A è aperto
th: A non contiene alcun punto di frontiera

Siano $x_0 \in \mathcal{F}A$,
poiché A è aperto, ogni punto di A è interno;
essendo x_0 di frontiera,
x_0 non è interno, quindi $x_0 \notin A$
dim. A non contiene alcun punto di frontiera $\Rightarrow$ A è aperto.
hp. A non contiene alcun punto di frontiera
th.: A è aperto
Sia x_0 un punto di A, allora

x_0 non può essere esterno
- x_0 è interno
- x_0 è di frontiera, si esclude per hp.

quindi x_0 è interno.
c.v.d.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

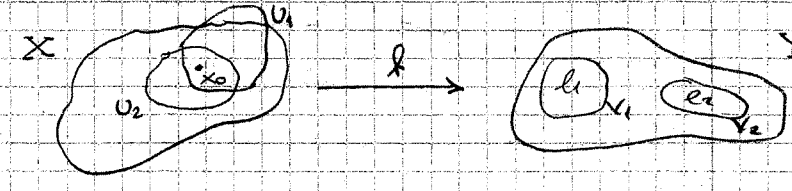
Corollario
A è chiuso $\iff$ A contiene tutta la sua frontiera
dim. A è chiuso $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\complement$A è aperto $\overset{\text{C. prec.}}{\iff}$ $\complement$A non contiene alcun punto di frontiera $\iff$ ogni punto di frontiera $\in$ A, cioè A $\supset$ tutta la frontiera di A.
c.v.d.

Parte interna e chiusura di un insieme

Capitolo 3: limiti

def di limite da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Teorema di unicità del limite
Esiste al più un limite per $x \to x_0$ di $f(x)$, con x_0 punto d'accumulazione per X
dim. per assurdo
hp: x_0 p.di accumulazione per X spazio metrico
th.: $\exists$ al più un limite
dim. supponiamo che esistano almeno due limiti: l_1 e l_2, con $l_1 \neq l_2$

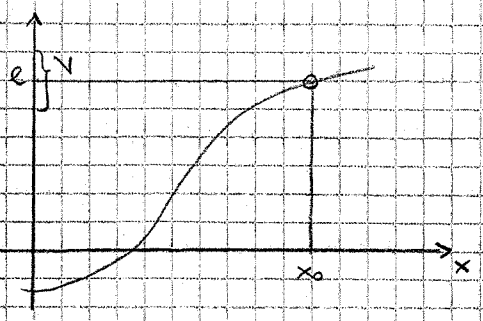


con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
$U = U_1 \cap U_2$
$\forall x \in U$, allora $f(x) \in V_1 \cap V_2$ assurdo perché $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ c.v.d.

Teorema della permanenza del segno:
Sia $f: X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$ allora $\exists U$ di x_0
se $x \in U - \{x_0\} \Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di l.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

dim. caso $l > 0$



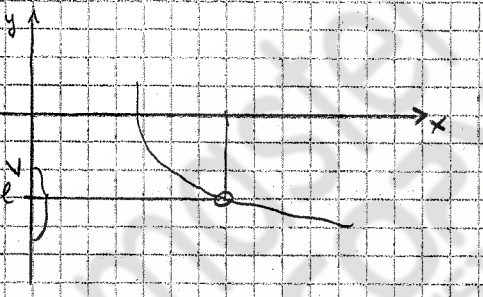
fisso $V = \left(\frac{1}{2}l ; \frac{3}{2}l\right)$

per def. $\exists U$ di x_0 \ se $x \in U - \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$ allora

$\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3}{2}l$

allora $f(x) > 0$

caso $l < 0$



$V = \left(-\frac{3}{2}l ; -\frac{1}{2}l\right)$, analogo

c.v.d.

Teorema della funzione prigioniera

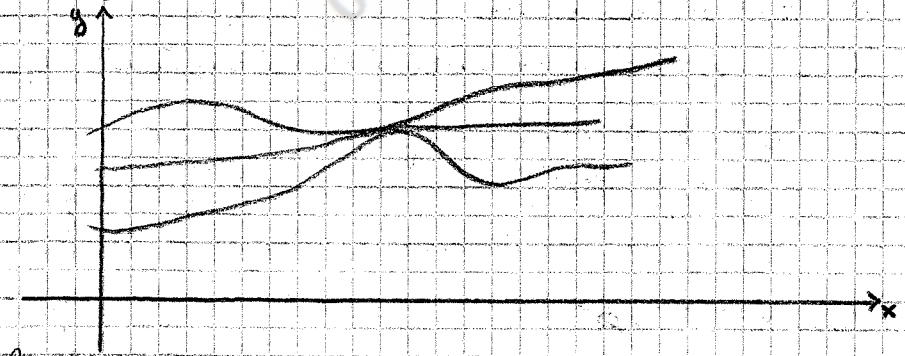
Siano date tre funzioni $f_1, f_2, g : X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}$

supponiamo $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in X - \{x_0\}$ (basta in intorno di x_0)

$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = l$

allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

dim. grafica



$f_1 \to (x_0, l)$

$f_2 \to (x_0, l)$

il grafico di g è compreso fra i due precedenti

allora $g \to (x_0, l)$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

c.v.d

dim. formale

fissato $V=(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ qualsiasi intorno di l

1) $\lim_{x\to x_0} f_1(x)=l \;|\; \exists U_1$ di $x_0 \;|\; x\in U_1-\{x_0\} \Rightarrow l-\varepsilon < f_1(x) < l+\varepsilon$

2) $\lim_{x\to x_0} f_2(x)=l \;|\; \exists U_2$ di $x_0 \;|\; x\in U_2-\{x_0\} \Rightarrow l-\varepsilon < f_2(x) < l+\varepsilon$

posto $U=U_1\cap U_2$, se $x\in U-\{x_0\}$ valgono tutte le disuguaglianze precedenti, quindi:

$l-\varepsilon < f_1(x) \le g(x) \le f_2(x) < l+\varepsilon$

allora $g(x)\in V$ c.v.d.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Operazioni sui limiti, def. lim dx e sx, rappr. grafica dei limiti, casi di indeterminazione, lim notevoli.

Successioni: n-ma sup. def. di limite, successioni monotone

Teorema di esistenza del limite

Se a_n è monotona allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$

(se a_n monotona crescente o deb. crescente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup$)

(se a_n è monotona decrescente o deb. decrescente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf$)

dim. caso deb. crescente, cioè $a_n \le a_{n+1}$

supponiamo a_n sup limitata allora sup $= L$ finito,

sia $V=(l+\varepsilon, l-\varepsilon)$ un qualsiasi intorno di L, per la II prop. dell'estremo superiore $\exists \bar{n} \;|\; a_{\bar{n}} > L-\varepsilon$

essendo a_n deb. crescente $\forall n > \bar{n}$, $a_n \ge a_{\bar{n}} > L-\varepsilon$

$a_n < L < L+\varepsilon$ quindi $a_n \in V$ c.v.d

Funzioni monotone, teorema di esistenza del lim dx e sx

Capitolo 4: continuità: def. di continuità in un punto,

Teorema

Se $x_0 \in X$ ed è d'accumulazione per X allora f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

dim. ovvia ponendo $l=f(x_0)$ c.v.d.

Teorema della permanenza del segno, operazioni fra funzioni continue a valori reali,

Teorema

Sia $f: X\to Y$ e $g: Y\to Z$ con f continua in $x_0\in X$ e g continua in $f(x_0)\in Y$, allora $g\circ f$ è continua in x_0.

dim.

th: $\forall V$ di $g(f(x_0))$ $\exists U$ di $x_0 \;|\;$ se $x\in U$ allora $g(f(x))\in V$