SINTESI

Concetti sulle eq. differenziali

FASTCOPY
Tel. 050/556414

EQ. LINEARI I ORDINE

a variabili separabili → $A(y)\cdot y' + B(x) = 0$

lineari

Def eq. differenziale

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ con incognita $y = y(x)$ si dice eq. diff. ordinaria di ordine n

Def. se è $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ si dice di tipo normale

Def. soluz. generale

è una soluzione $y = \varphi(x, c_1, c_2 \dots c_n)$ che dipende da n costanti $c_1, \dots, c_n$. Fissando $c_1, c_2 \dots c_n$ si ha una soluz. particolare.

① A VARIABILI SEPARABILI

$A(y)\,y' + B(x) = 0 \Rightarrow A(y)\cdot y' = -B(x) \Rightarrow \int A(y)\underbrace{y'}_{dy}\,dx = \int -B(x)\,dx$

esempio ①

$(1+x^2)y' = \sqrt{1-y^2}$, si separano le variabili

$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}\,\overbrace{dx}^{dy} = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\arcsin y + C_1 = \operatorname{arctg} x + C_2 \Rightarrow \arcsin y = \operatorname{arctg} x + C$ SOLUZ. FORMA IMPLICITA

$\begin{cases} y = \sin(\operatorname{arctg} x + C) \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ SOL. FORMA ESPLICITA

Ho diviso per $\sqrt{1-y^2}$, allora $\sqrt{1-y^2} = 0$ $y = \pm 1$, è soluzione?

Sost. nell'eq. iniziale

$(1+x^2)\cdot 0 - \sqrt{0} \Rightarrow 0 = 0$ vera $\Rightarrow y = \pm 1$ è soluz. SOL. SINGOLARE

Def. una soluz. è singolare se NON si ottiene fissando c nella soluz. generale

esempio ②

$y\cdot y' = 1 + y^2$ $\frac{y\cdot y'}{1+y^2} = 1$ $\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \int dx$ $\frac{1}{2}\log|1+y^2| = x + C$ SOL GENERALE

SOL PART? $y^2 = -1$ NO

Trovare la soluz $y(x)$ tale che $y(2) = 0$

Nella sol gen si va a sostituire 2,1

$\frac{1}{2}\log|1+0| = 2 + C \Rightarrow C = -2$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\log|1+y^2| = x - 2$

Pb. di Cauchy

SINTESI

- per eq.ni del I ordine: si cerca una soluzione tale che $y(x_0) = y_0$ (il graf passa per (x_0, y_0))
- per eq.ni di ordine n: cerco una soluzione $y(x)$ tale che
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_{1,0} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \end{cases}$$
n condizioni

Teorema di Cauchy per eq.ni del I ordine

Data l'eq. diff. ordinaria del I ordine di tipo normale $y' = f(x,y)$
Sia f continua in U di (x_0, y_0) e f'_y pure continua in U, allora esiste un'unica sol. locale del pb di Cauchy $y(x_0) = y_0$ definita in un intorno di x_0, con (x_0, y_0) interno al c.e. di f

esempio ①

$y' = xy\sqrt{\log y + 2}$, valgono le hp. di Cauchy? per $y(0) = 1$ $(0,1)$

Intanto risolvo l'eq. diff:

$$\frac{y'}{y\sqrt{\log y + 2}} = x \qquad \int \underbrace{\frac{1}{y\sqrt{\log y + 2}}}_{t} y'\,dy = \int x\,dx \qquad 2\sqrt{\log y + 2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \text{sol. c.}$$

$y = e^{-2} \Rightarrow 0 = 0$ è sol SING

$y = 0$ NO

$$f'_y = x\sqrt{\log y + 2} + xy\,\frac{1}{2\sqrt{\log y + 2}} \cdot \frac{1}{y}$$

f è continua su U di $(0,1)$? sì
f'_y è continua su U di $(0,1)$? sì
$\Rightarrow \exists$ un'unica sol locale

sost $(0,1)$ in sol. gen.: $2\sqrt{2} = c$

SOL PART: $2\sqrt{\log y + 2} = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{2}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

② EQ.NI LINEARI

I ordine

$y' + a(x)y = b(x)$, $a(x)$ e $b(x)$ continue su I

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$, la sol generale è $y = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\,dx$

Oss nelle eq.ni lineari c'è una sola sol al pb di Cauchy

esempio ①

$$y' + \frac{1}{x \cdot \log x} y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$A(x) = \int \underbrace{\frac{1}{x \log x}}_{\frac{1}{t}} dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|\log x| + c$$

② $$y(x) = e^{-\log|\log x|} \cdot \int e^{\log|\log x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{|\log x|} \int |\log x| \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{\log x}\int \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

$y(x) = \frac{1}{\log x}\left(2\sqrt{x}\log x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\log x}\left(2\sqrt{x}\log x - 4\sqrt{x} + c\right)$

$y(x) = 2\sqrt{x} - \frac{4\sqrt{x}}{\log x} + \frac{c}{\log x}$ SOL GEN

Pb di Cauchy: cercare la sol il cui grafico passa per $(e,1)$ $(y(e)=1)$

sost nella sol generale.

$1 = (2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + c) \Rightarrow c = 1 + 2\sqrt{e}$ e la sost nella sol gen

Teorema di Cauchy (per eq. di ordine n)

Data $y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$ e sia $(x_0, y_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}) \equiv P_0$ interno al C.E. di f.

Se in un intorno di P_0 la f è continua e sono continue $f'_y, f'_{y_1}, \dots, f'_{y_{(n-1)}}$ allora esiste una soluzione del pb di Cauchy

def eq. lineari di ordine n

$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ con $a_i(x)$ e $b_i(x)$ continue su un intervallo I.

$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + y'a_1(x) + a_0(x)y = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

def eq. lineari omogenee

$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Teorema

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono solu dell'eq omogenea anche $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ è soluzione

Teorema

Se $y_1, \dots, y_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti allora $y(x) = c_1y_1 + \dots + c_ny_n$ è la solu generale.

Teorema

Se $\bar{y}$ è una solu dell'eq non omogenea allora detta y_0 la soluzione generale dell'omogenea associata, $y = \bar{y} + y_0$ è la solu generale della non omogenea.

Eq. lineari omogenee a coeff costanti

Cerco soluzioni del tipo $y = e^{\lambda x}$

esempio ①

$y'' + 4y' + 3y = 0$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$
$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ sost. nell'eq

$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0$ equivale a $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \begin{matrix}1\\3\end{matrix}$

SINTESI

e^x, e^{3x} sono soluz. indip.

$\Rightarrow y_o = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ è SOL GEN

I caso: il polinomio caratteristico abbia radici reali distinte

esempio ①

$y^{(4)} - 3y^{(3)} - y^{(2)} + 3y' = 0$

$\lambda^4 - 3\lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda = 0$

$\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda = 1\\ \lambda = -1\\ \lambda = 3\end{array}\right\}\ y_o = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$

II caso: il polinomio caratt abbia radici reali distinte

esempio ①

$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y^{(2)} = 0$

$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \lambda^2(\lambda-1)^3 = 0$

$\left.\begin{array}{l}\lambda = 0 \text{ molteplicità } 2\\ \lambda = 1 \text{ molt } 3\end{array}\right\}\ y_o = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{3x} + c_4 x e^{3x} + c_5 x^2 e^{3x}$

III caso: il polinomio caratt. abbia radici complesse coniugate

esempio ①

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$y_o = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Eq. ni lineari a coeff. costanti non omogenee

$y^{(n)} + c_{n-1} y^{n-1} + \dots + c_1 y' + c_0 y = b(x)$

$y^{(n)} + c_{n-1} y^{n-1} + \dots + c_1 y' + c_0 y = 0$ omogenea associata

❶ si trova y_o soluz generale dell'omogenea associata

❷ si trova (per somiglianza) una soluz $\bar{y}$ della non omogenea

❸ $y = \bar{y} + y_o$ è soluz generale della non omogenea

I caso: $b(x)$ sia un polinomio di grado n

cerco $y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, sost. nell'eq.ne e ricavo gli a_i

esempio ①

$y'' - y = 2x^2 + x$

parte 1ª: $y'' - y = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$y_o = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$ SOL GEN OMOGENEA

parte 2ª: $\bar{y} = ax^2 + bx + c$

$\bar{y}' = 2ax + b$

$\bar{y}'' = 2a$

sost. nell'eq. ne: $2a - ax^2 - bx - c = 2x^2 + x$

$$\begin{cases} -a = 2 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\bar{y} = -2x^2 - x - 4$ SOL PART. DELLA NON OMOG.

$y = y_0 + \bar{y}$

Oss importante: se nell'eq. manca la y, per trovare $\bar{y}$ devo moltiplicare per x il generico polinomio

Se mancano sia y che y' si moltiplica per x^2, ecc.

esempio

$y^{(4)} + 2y^{(2)} = 3$

$y^{(4)} + 2y^{(2)} = 0$ omog. associata

$\lambda^4 + 2\lambda^2 = 0 \quad \lambda^2(\lambda^2 + 2) = 0 \quad \lambda = \begin{cases} 0 \text{ molt } 2 \\ \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \end{cases}$

$y_0 = c_1 + c_2 x + c_3 \cos(\sqrt{2}x) + c_4 \sin(\sqrt{2}x)$

Cerco ora $\bar{y} = a \cdot x^2$

(moltiplico per x^2 in quanto manca y e y')

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax \\ y'' = 2a \\ y^{(3)} = 0 \\ y^{(4)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{4}x^2$$

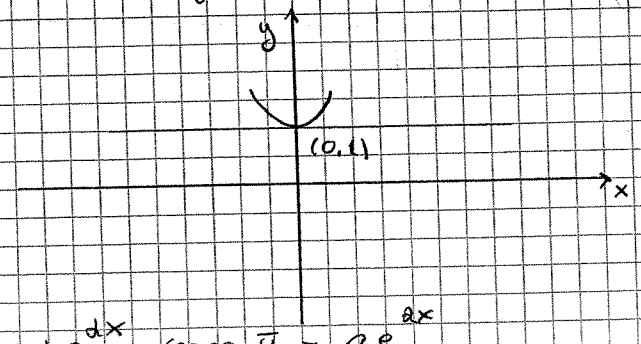
SOLUZ. GENERALE: $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos(\sqrt{2}x) + c_4 \sin(\sqrt{2}x) + \frac{3}{4}x^2$

Si possono abbinare i pb di Cauchy: cercare la soluz tale che:

$y(0) = 1$

$y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$

$y^{(4)}(0) + 2y''(0) = 3 \Rightarrow y^{IV}(0) = 3 > 0$ è convessa



II caso: $b(x) = e^{\alpha x}$, cerco $\bar{y} = ae^{\alpha x}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745