- Esami orali

  dal 2016

  al 2018

- Professor Flandoli

master COPY COPISTERIA
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745
050/8312126 388/9837745

UNIVERSITÀ DI PISA



master COPY COPISTERIA
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745
050/8312126 388/9837745

12.01.2016:

Problema 1. La temperatura ottimale di estrusione di una fibra artificiale è di 280–290 °C. Una serie di 25 controlli sui meccanismi di estrusione ha permesso di rilevare una temperatura media $\bar{x} = 277.6$ °C, con deviazione standard $s = 10.3$ °C.

- Qual è una ragionevole stima della temperatura massima rilevabile in una misurazione, eventualmente ignorando il 3% delle misurazioni più estreme e tenendo conto dell'incertezza sulla media relativa ad un livello di confidenza del 98%?

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\bar{x} = 277.6$ °C

$S = 10.3$ °C

$n = 25$

$$\mu = \bar{x} + S \cdot \frac{t_{n-1,\alpha}}{\sqrt{n}}$$

$1 - 0.98$

↓

Si utilizza t-student poiché $n < 30$: si ha $t_{24,0.02} \approx 2.17$ e una stima per eccesso di μ con fiducia al 98% è data da:

$$\mu = 277.6 + \frac{10.3}{\sqrt{25}} t_{24,0.02} \approx 282.1$$

Temperatura massima?

$$q_{max} = \mu + S\, q_{1-\alpha}$$

Trovare il 3% delle misurazioni più estreme ($q_{0.03} = 1.88$):

$$q_{max} = \mu + S(1.88) = 301.46$$

- Valutare con un opportuno test se la temperatura di estrusione sia inferiore a 275 °C. Qual è il test più opportuno? Scrivere una regione critica al 95% per il test. Valutare il [illegible].

TEST UNILATERO SINISTRO:

$H_0) \ \mu \leq 275 \qquad H_1) \ \mu > 275$

Una regione critica del test con fiducia al 95% è data da:

$$\left\{ x_1 \dots x_n : \bar{x} > 275 + \frac{10.3}{\sqrt{25}} t_{24,0.05} \right\} = \left\{ \bar{x} > 278.52 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} + t_{2,n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Adesso devo calcolare la STATISTICA del test:

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{S}\sqrt{n} \quad \text{con } \mu_0 = 27.5 \text{ e } n = 25 \; ; \; \geq 1.26$$

p-value $= \mathbb{P}[T_{24} \geq 1.26] = 1 - \Phi(1.26) = 1 - 0.89 = 0.11$

$\Rightarrow$ p-value $\geq \alpha \Rightarrow$ non posso rigettare l'ipotesi

- Valutare con un opportuno test l'ipotesi se la deviazione standard sia inferiore a 15 °C.

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

Test sulla varianza unilaterale destra:

$H_0) \; \sigma \geq 15 \qquad H_1) \; \sigma < 15$

La STATISTICA del test è $(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$, con distribuzione χ^2 con 24 gradi di libertà, dove $n = 25$ e $\sigma_0 = 15$, la soglia è 11.32 ed il p-value è $\mathbb{P}[\chi_{24} \leq 11.32] \approx 0.013$.

$\Rightarrow$ Sulla base del p-value ottenuto rigettiamo l'ipotesi che la deviazione standard sia almeno 15 °C.

- Ricavare la curva operativa caratteristica del test svolto nel quesito precedente con fiducia 97.5%.

N.B.

La curva operativa caratteristica è data dalla probabilità dell'errore di 2° specie nel test sulla media appena visto con significativo $\alpha = 0.025$, sapendo il valore vero della deviazione standard $\sigma < 15$:

$$\beta(\sigma) = P_\sigma\left[24\frac{S^2}{15^2} \geq \chi_{24,0.975}\right] = P_\sigma\left[24\frac{S^2}{\sigma^2} \geq \frac{15^2}{\sigma^2}\chi_{24,0.975}\right] =$$

$$= 1 - F_{\chi^2(24)}\left(\frac{9790}{\sigma^2}\right)$$

MASTER COPY

Problema 2. Dato $a > 0$, si consideri un campione estratto da una popolazione con densità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & a < x < 2a, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Determinare il valore di c.
- Calcolare media e varianza di una variabile aleatoria con densità f.
- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di a e darne una stima utilizzando i seguenti dati

19.15, 15.26, 18.34, 21.74, 22.96, 18.37.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
cell. 388 9837745

a) $$1 = \int_{0}^{2a} \frac{c}{x^2}\,dx = \int_{0}^{2a} c\,x^{-2}\,dx = c\int_{0}^{2a} x^{-2} = c\left|\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{0}^{2a} =$$

$$= c\left|-\frac{1}{x}\right|_{a}^{2a} = c\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{c}{2a} = 1 \Rightarrow c = 2a$$

b) $$E[X] = \int x f(x) = \int_{a}^{2a} x\,\frac{2a}{x^2}\,dx = \int_{a}^{2a} \frac{2a}{x}\,dx = 2a\int_{a}^{2a} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2a\left|\log(x)\right|_{a}^{2a} = 2a\left(\log(2a) - \log(a)\right) = 2a\log(2)$$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = \int_{a}^{2a} 2a\,dx = 2a(2a - a) = 2a^2$$

$$\mathrm{Var}[X] = 2a^2 - (2a\log(2))^2$$

c) Stimatore di massima verosimiglianza di a:

$$M(a \mid X_1 \dots X_n) = \frac{c^n}{(x_1^2 \dots x_n^2)} = \frac{2^n a^n}{|x_1^2 \dots x_n^2|} \Rightarrow$$

$$\text{derivo} \quad \frac{2^n}{|x_1^2 \dots x_n^2|}\, n a^{n-1} = 15.26$$

Tale funzione è chiaramente crescente rispetto ad a, assume quindi il suo massimo in corrispondenza del più grande valore possibile di a. Quindi lo stimatore di massima verosimiglianza di A è $A = \min(X_1 \dots X_n)$ quindi $a = 15.26$