PROBABILITÀ E STATISTICA

STATISTICA → DESCRITTIVA
→ INFERENZIALE

STATISTICA INFERENZIALE

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

L'INSIEME DI TUTTI GLI ESETI POSSIBILI PER UN DETERMINATO ESPERIMENTO SI DICE UNIVERSO O SPAZIO DEGLI ESITI (SAMPLE SPACE, O STATE E SI INDICA CON S O Ω).

I SOTTOINSIEMI DELLO SPAZIO DEGLI ESITI SI DICONO EVENTI; È QUINDI UN INSIEME I CUI ELEMENTI SONO ESITI POSSIBILI

GLI EVENTI ELEMENTARI SONO EVENTI FATTI DA UN SINGOLO PUNTO / ELEMENTO / RISULTATO.

OPERAZIONI TRA INSIEMI / EVENTI

L'UNIONE DI DUE EVENTI DELLO STESSO SPAZIO DEGLI ESITI È DEFINITA COME L'INSIEME FORMATO DAGLI ESITI CHE STANNO O IN UNO O NELL'ALTRO EVENTO

L'INTERSEZIONE DI DUE EVENTI È L'INSIEME DEGLI ESITI CHE SONO PRESENTI IN ENTRAMBI GLI EVENTI.

IL COMPLEMENTARE DI UN EVENTO È L'INSIEME DEGLI ESITI DI Ω CHE NON FANNO PARTE DELL'EVENTO

FORMULE DI DE MORGAN

① $(\cup A_m)^c = \cap A_m^c$

② $(\cap A_m)^c = \cup A_m^c$

AD OGNI EVENTO SI ASSOCIA UN NUMERO $P(E)$ E SI DICE PROBABILITÀ DELL'EVENTO E.
ESSA È UNA FUNZIONE CHE ASSOCIA AD EVENTI DEI NUMERI

Proprietà della probabilità

① $0 \leq P(E) \leq 1$

② $P(\phi) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$

③ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ MUTUALMENTE DISGIUNTI $\Rightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \sum_{m=1}^{m} P(A_m)$

CASI NOTEVOLI

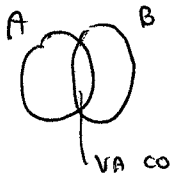
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

  dim. $\Omega = A \cup A^c$ con A e A^c disgiunti

  $1 = P(\Omega) = P(A \cap A^c) = P(A) + P(A^c)$

  $1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$



VA CONTATO UNA SOLA VOLTA

SPAZI DI ESITI EQUIPROBABILI

SONO UNIVERSI IN CUI TUTTI I PUNTI HANNO LA STESSA PROBABILITÀ DI REALIZZARSI.
SONO INSIEMI FINITI.

$$P(A) = \frac{\text{CARDINALITÀ DI } A}{n} = \frac{\#A}{n}$$

$$\frac{\text{n° casi favorevoli}}{\text{n° casi possibili}}$$

esempio PROBABILITÀ CHE LANCIANDO DUE DADI ESCA ALMENO UN 6

$$\Omega = \{(h, k) : h, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

h = RISULTATO 1° LANCIO
k = RISULTATO 2° LANCIO

A = "ESCE ALMENO UN 6"

CARD A = 11 $\quad (6,*) + (*,6) - (6,6)$

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

PRINCIPIO DI ENUMERAZIONE

CONSIDERANDO LA REALIZZAZIONE DI DUE DIVERSI ESPERIMENTI, CHE POSSONO AVERE RISPETTIVAMENTE m E n ESITI DIFFERENTI. ALLORA COMPLESSIVAMENTE VI SONO $m \cdot n$ DIVERSI RISULTATI SE SI CONSIDERANO ENTRAMBI GLI ESPERIMENTI CONTEMPORANEAMENTE.

IN GENERALE: $K_1, K_2, K_3, \dots, K_m$ ESPERIMENTI CIASCUNO CON N° DI ESITI $m_1, m_2, m_3, \dots, m_m$;
ALLORA IN TOTALE CI SONO $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_m$ DIVERSI RISULTATI

PERMUTAZIONI $n!$

DISPOSIZIONI SEQUENZE ORDINATE DI k LETTERE DIVERSE PRESE DA UN ALFABETO DI n LETTERE, SONO DISPOSIZIONI DI n OGGETTI IN k POSTI

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

COMBINAZIONI GRUPPI NON ORDINATI DI k LETTERE DIVERSE PRESE DA UN ALFABETO DI n LETTERE, SONO LE COMBINAZIONI DI n OGGETTI IN k POSTI

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

IL COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$ INDICA IL NUMERO DI COMBINAZIONI DI n ELEMENTI PRESI k ALLA VOLTA

FORMA IPERGEOMETRICA

$$\frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n_1+n_2}{k_1+k_2}}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

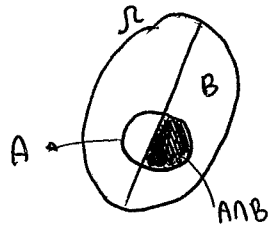
PROBABILITA' CONDIZIONATA

È UNA PROBABILITÀ CONDIZIONATA A INFORMAZIONI SUPPLEMENTARI

LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO A CONDIZIONATA AD UN EVENTO B (CIOÈ SAPENDO B) SI INDICA CON $P(A|B)$ E VALE

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

INTERPRETAZIONE GRAFICA



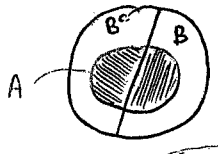
$P(A|B)$ = PROBABILITÀ DI A SAPENDO CHE B SI VERIFICA

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

DIVIDO PER $P(B)$ PER MANTENERE LA PROB. TOTALE PARI A 1

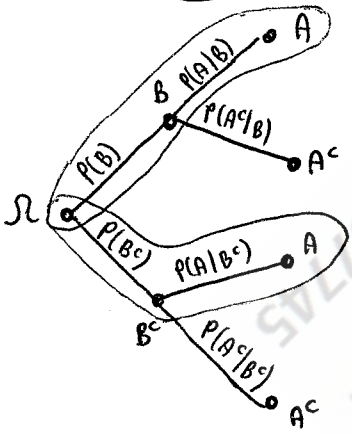
FORMULA DI FATTORIZZAZIONE

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$



dimostrazione

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$



LA FORMULA DI FATTORIZZAZIONE È LA FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

BASTA SOMMARE LE PROBABILITÀ LUNGO I PERCORSI DI UN ALBERO DI EVENTI.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

FORMULA DI BAYES

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

PERMETTE DI CALCOLARE LA PROBABILITÀ DELLE CAUSE CONOSCIUTO L'EFFETTO

dim:

$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(A \cap B) = P(B \cap A)$ vero ∀ insieme

LA FORMULA DI BAYES RISOLVE IL PROBLEMA DI TROVARE LA CAUSA PIÙ PROBABILE, OSSERVATO L'EFFETTO. SE L'EFFETTO A PUÒ ESSERE CAUSATO DA B_1 O B_2, SI VUOLE CAPIRE CHI È MAGGIORE TRA $P(B_1|A)$ E $P(B_2|A)$.

DATO CHE IL DENOMINATORE NELLA FORMULA DI BAYES È LO STESSO, BASTA CONFRONTARE $P(A|B_1) \cdot P(B_1)$ CON $P(A|B_2) \cdot P(B_2)$.

NEL CASO DI CAUSE EQUIPROBABILI ($P(B_1) = P(B_2)$) SI CONFRONTA $P(A|B_1)$ CON $P(A|B_2)$

IL PROB. DELLA SCELTA DELLA CAUSA PIÙ PROBABILE VIENE INTERPRETATO CON L'ALBERO DEGLI EVENTI: SI TRATTA DI CALCOLARE LE PROBABILITÀ LUNGO I PERCORSI E CONFRONTARLE.

INDIPENDENZA

DUE EVENTI A E B SI DICONO INDIPENDENTI SE

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(A E B SI DICONO DISGIUNTI SE $A \cap B = \emptyset$)

VARIABILI ALEATORIE

QUANDO SI REALIZZA UN ESPERIMENTO CASUALE, NON SEMPRE SI È INTERESSATI IN UGUAL MODO A TUTTE LE INFORMAZIONI RICAVABILI DAL SUO ESITO. SPESSO SI PUÒ INDIVIDUARE UNA SINGOLA QUANTITÀ NUMERICA CHE RACCHIUDE TUTTO CIÒ CHE IN REALTÀ VOLLIAMO SAPERE.

QUANTITÀ DI INTERESSE CHE, COME QUESTE, SONO DETERMINATE DAL RISULTATO DI UN ESPERIMENTO CASUALE SONO DETTE VARIABILI ALEATORIE. SICCOME IL VALORE DI UNA V.A. È DETERMINATO DALL'ESITO DELL'ESPERIMENTO, POSSIAMO ASSEGNARE DELLE PROBABILITÀ AI SUOI VALORI POSSIBILI.

LE V.A. SI DIVIDONO IN:

- DISCRETE, CON UN NUMERO FINITO O NUMERABILE DI VALORI POSSIBILI CHE POSSONO ASSUMERE
- CONTINUE, CHE POSSONO ASSUMERE UN INSIEME CONTINUO DI VALORI POSSIBILI

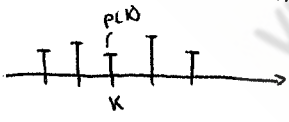
LA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE F DI UNA VARIABILE ALEATORIA X È DEFINITA, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, COME

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ESPRIME LA PROBABILITÀ CHE LA VARIABILE ALEATORIA X ASSUMA UN VALORE MINORE O UGUALE A x.

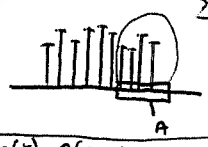
V.A. DISCRETE

DENSITÀ DI PROBABILITÀ DISCRETA O FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ: $p(k) = P(X = k)$ con $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1$



$$P(X \in A) = F(x) = \sum_{k \in A} p(k)$$

es. $P(X > 5) = \sum_{k=6}^{\infty} p(k) = 1 - \sum_{k=0}^{5} p(k)$



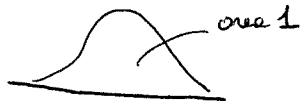
NB: $p(k) = P(X=k)$ DETERMINANO TUTTA L'INFORMAZIONE

$$p(k) \longrightarrow \sum_{i=0}^{k} p(i)$$

$$\sum_{i=0}^{k} (p.i) \longrightarrow p(k) = \sum_{i=0}^{k} p(k) - \sum_{i=0}^{k-1} p(i)$$

V.A. CONTINUE

FUNZIONE DENSITÀ DI PROBABILITÀ (f): $f(x)$ < $f(x) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx$$

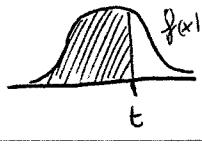
es. $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)\,dx$



$$f(x) \longrightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

$$F(t) \longrightarrow f(x) = F'(t)$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$



NB. $P(X=k)$ VALE 0

$P(X=k) = \int_k^k f(x)\,dx = 0$

VALORE ATTESO (anche valor medio o speranza)

nel discreto $$E[X] = \sum K \cdot P(K)$$

SI TRATTA DI UNA MEDIA PESATA DEI VALORI POSSIBILI DI X, USANDO COME PESI LE PROBABILITÀ CHE TALI VALORI VENGANO ASSUNTI DA X.

nel continuo $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

IN ENTRAMBI I CASI IL VALORE ATTESO È SIMILE AL CONCETTO DI CENTRO DI GRAVITÀ O BARICENTRO.

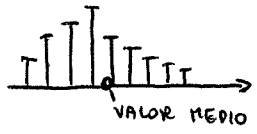
RICORDANDO CHE LA MEDIA EMPIRICA DI UN CAMPIONE SPERIMENTALE È: $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} = \sum a_K \hat{p}_K$

DOVE $\hat{p}_K$ È LA FREQUENZA RELATIVA EMPIRICA CON CUI SI OSSERVA a_K NEL CAMPIONE;

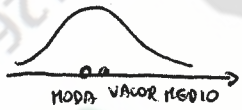
SI NOTA CHE $\bar{x}$ APPROSSIMA $E[X]$

in $\bar{x}$ i valori sono pesati con la frequenza empirica
mentre in $E[X]$ i valori sono pesati con le loro probabilità.

nel discreto



nel continuo



es. 1

$X = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$ $\quad P(1) = 1/3,\ P(0) = 1/3,\ P(-1) = 1/3$

$$E[X] = \mu = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

es. 2



$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

TRASFORMAZIONI DI V.A.

X V.A ; $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\quad Y = g(X)$ $\quad$ Y è una V.A.

VALOR MEDIO DI UNA TRASFORMAZIONE DI V.A.

nel discreto $$E[Y] = E[g(X)] = \sum g(x_k)\, p(x_k)$$

nel continuo $$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$