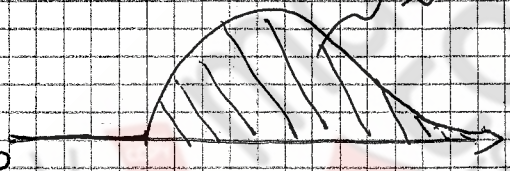
F. Flandoli Statistica II 6 cfu ♡

Cap 1 Preliminari di Probabilità } RIPASSO
Cap 2 " " Statistica }
Cap 3 Processi Stocastici
Cap 4 Serie Storiche
Cap 5 Markov
Cap 6 Statistica multivariata

Compitino a metà dicembre

Definizione: Si chiama densità di probabilità una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. (pdf)

1) $f(x) \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

* Integrali impropri (con estremi infiniti)

Area di una regione illimitata = 1 e ci si riferì al concetto di integrale improprio

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Trovare la costante c per cui f è una pdf.

SOL
1) La proprietà è che $f(x) \geq 0$, quindi $c \geq 0$.

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \to \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \to \int_{0}^{+\infty} c\,e^{-x}\,dx = 1$$

$$c\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = c\left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 0 + c = \boxed{c = 1}$$

$-e^{-(+\infty)} = 0$

NOTA
INT. indefinito: funzione primit. + cost $\rightsquigarrow \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$

Se $f(x) = \begin{cases} c e^{-x\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ⇝ Densità esponenziale di parametro λ

trovare c e λ per cui $f(x) = pdf$

$$c\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} = c\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = 0 - c\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{c}{\lambda} = 1$$

$$\boxed{c = \lambda}$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745 4

NOTA

$$\int e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + c$$

λ e c però non hanno un ruolo simmetrico.

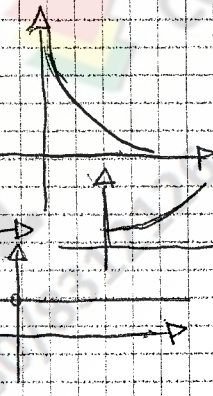
- c è la cost di normalizzazione che fa venire 1 l'integrale ed è convenzionale che venga uguale ad 1!
- Ho un peso diverso: prima da trovato λ per cui l'integrale è finito, e poi trovi c!

Quasi sempre gli integrali impropri divergono (fanno $+\infty$) e allora si che viene finito.

Se $\lambda > 0$ → $e^{-\lambda x}$ → AREA FINITA

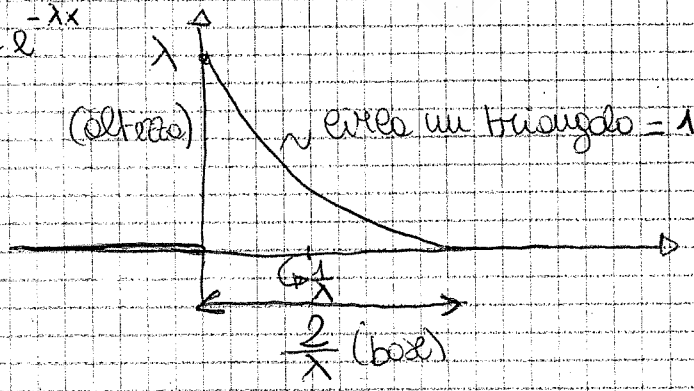
Se $\lambda < 0$ → $e^{-\lambda x} = e^{+\infty}$ → Area infinita } DIVERGE

Se $\lambda = 0$ → $e^0 = 1$ → Area infinita } ↓ non va bene



λ deve essere positivo.

$f(x) = c e^{-\lambda x}$



$$\frac{\lambda \cdot 2\lambda}{2} = 1$$

pt medio: $\frac{1}{\lambda}$

Definizione: densità discreta su $\mathbb{N}$ è una successione di numeri reali $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

1) $p_n \geq 0 \ \forall n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

NOTA
nei $\mathbb{N}$ è incluso lo 0

Se p è una pdf, non è detto che $p(x) \leq 1$
Invece $p_n \leq 1 \ \forall n$ (sono singoli numeri positivi e la somma $= 1$!)

Esercizio

$p_n = c(1-p)^n$ → densità discr. geom. di parametro p
$n = 0, 1, 2, \dots$

Trovare p e c per cui è una densità discreta.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

1) $c > 0$ (se n è pari)
$1-p \geq 0$ (se n è dispari)
$p \leq 1$

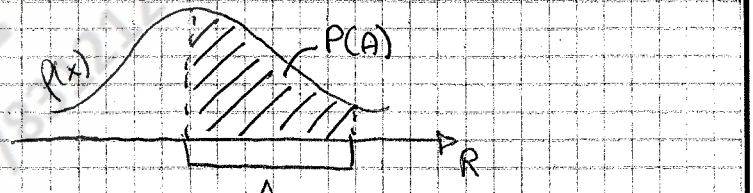
2) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = c \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n$ — converge se $|1-p| < 1$ → $1-p < 1$ → $p > 0$
Sia che $p = 1$, levi il val. ass.

$c \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{c}{p} = 1$ → $c = p$

Serie geometrica
Che converge se?
$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge $\Leftrightarrow |a| < 1$ — $\frac{1}{1-a}$

$c = p \quad 0 < p \leq 1$

Densità p; $\{p_n\}$
continua — discreta



. CASO CONTINUO

$\Omega = \mathbb{R}$; $A \subset \Omega$ ad esempio un intervallo, definisco $P(A) = \int_A f(x)\,dx$
Ω spazio — A sottoinsieme
e lo chiamo probabilità di A

Integro su A però non posso fondo per qualsiasi insieme infatti se $A = \emptyset$ $m = 0$
una delle due cose

Questo vale per gli insiemi facili
Ci sono insiemi difficili < LE PERSONE — in cui $\int$ si può definire
area $\int$ non definire e non può fare nulla.
Noi usiamo sempre insiemi facili

$A \subset \Omega \longrightarrow P(A)$

Ad ogni insieme A diciamo associato $P(A)$. Abbiamo definito una applicazione P che $\forall A$ associa un numero $P(A)$ con $A \subset \Omega$

$P(A) \in [0,1]$

$P(A)$ è un area quindi al più $\emptyset$ e l'area max è $1,0 \leq A \leq 1$

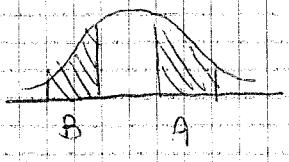
PROPRIETÀ

1) Se $A = \Omega$ $\quad P(\Omega) = 1$

2) Se A e B sono due insiemi disgiunti $A \cap B \neq \emptyset$, allora la loro

$P(A \cup B) =$ integrale su $A \cup B = \int_{A \cup B} p(x)dx = \int_A p(x)dx + \int_B p(x)dx =$ (area, area)

$= P(A) + P(B)$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ con $A \cap B = \emptyset$

PIÙ IN GENERALE:

Dato un insieme Ω, che chiamiamo universo, chiediamo proprietà tale applicazione che "ad ogni" $A \subset \Omega$ associ un numero $P(A) \in [0,1]$ tale che

1) $P(\Omega) = 1$

2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono a due a due disgiunti, allora

$P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ (FINITO)

Se ho una successione infinita di insiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots$ a due a due disgiunti, allora

$P(\cup A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (INFINITO!) NB PER DIMOSTR. ASTRATTA

CASO DISCRETO

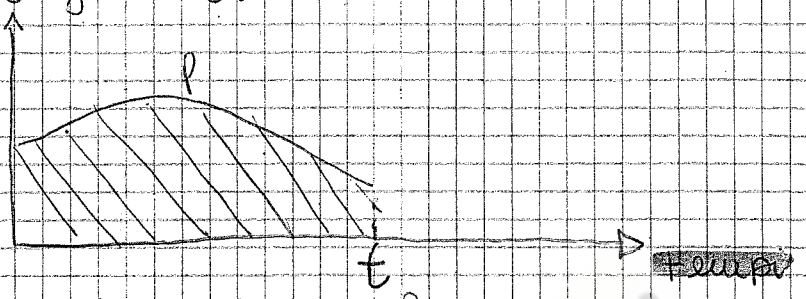
$\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad$ ad ogni $A \subset \Omega$

ossiamo $P(A) = \sum_{n \in A} p_n$ $\quad$ e dice che P è una probabilità e gode di quelle proprietà.

C'è una teoria collegata di cosa finiti in cui non ci sono numeri in gioco, una formulazione $\rightarrow$ qual è la P (che poi dovremo?)

CARRELLATA DI DENSITÀ CONTINUE e PROB. A LORO ASSOCIATA

1) Stabiliamo il problema della durata (tempo di vita) di un sistema elettronico. La durata non è deterministica, nel senso che non si può definire la vita esatta. È un problema aleatorio, con un certo grado di variabilità.



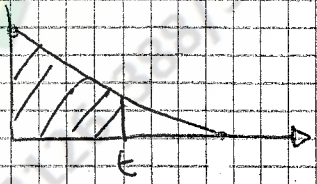
I valori sull'asse sono la durata possibile del sistema elettronico.

Immagino che ci sia una funzione f, se calcolo l'area sotto è la "prob." che il sist. si rompa prima del tempo t

↳ in senso pratico, cioè su 100 campadine una % si rompe entro il tempo t ma quella è la "prob.", la % di esemplari che si rompe entro t. Non è un concetto preciso, perché la % cambia da esperimento a esperimento. Non è un caso che ho usato relativo a quello esperimento lì.

- Se io faccio più esperimenti

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



è una delle curve più comuni a questi esperimenti, la descrive approssimando la probabilità che si rompa prima di t è $P(\tau_0, t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$

↳ lo decido io:

↳ quanto è? Dipende dagli esperimenti!

Prendo 30 esemplari, li faccio durare per tempo t_0, scopro quanti si sono rotti $\hat{p} = \frac{12}{30}$. Devo estrapolare λ e da lì passo avere la $p(\tau_0, t_0)$ scelta

Dati sperimentali $\xrightarrow{?}$ parametri delle densità $\longrightarrow$ calcolare prob.

Di fronte a dati sperimentali, conoscendo più curve e più strategie di valutazione, decido quale è più adatta