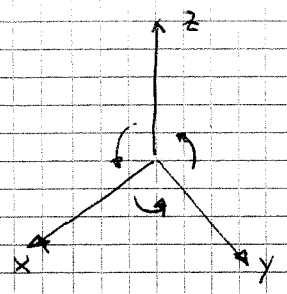
MECCANICA DELLE STRUTTURE

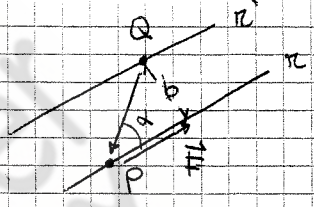
LE FORZE E I MOMENTI SONO VETTORI CARATTERIZZATI DA DIREZIONE, VERSO, INTENSITÀ E PUNTO DI APPLICAZIONE



TERNA DI RIFERIMENTO DESTRA E LEVOGIRA
(SE ABBIAMO UN OSSERVATORE DISPOSTO SU Z, CON UNA ROTAZIONE ANTIORARIA DI X SI OTTIENE Y E ALLO STESSO MODO CON GLI ALTRI ASSI)

$\vec{F}_P$ E $\vec{M}_Q$ È POSSIBILE RAPPRESENTARLI CON LE COMPONENTI CARTESIANE $\longrightarrow \vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$

$\vec{P} = \begin{Bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{Bmatrix}$



M_Q È PERPENDICOLARE AL PIANO INDIVIDUATO DAL VETTORE $\vec{QP}$ E DALLA RETTA r

$\vec{F}$ È LA RISULTANTE DELLE FORZE PARALLELE AGLI ASSI

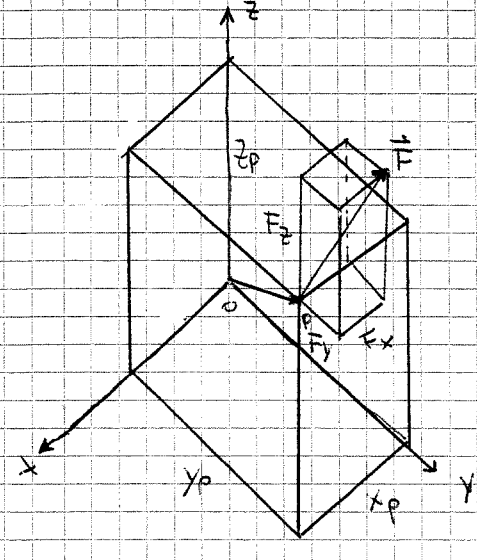
$$\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{M}_Q = (P-Q) \wedge \vec{F} = PQ \cdot |\vec{F}| \sin\alpha = F \cdot b$$

(b CORRISPONDE AL BRACCIO)

N.B IL MOMENTO NON VARIA ALLO SPOSTARSI DI P LUNGO LA RETTA DI APPLICAZIONE

CALCOLIAMO IL MOMENTO IN TERMINI DI COMPONENTI



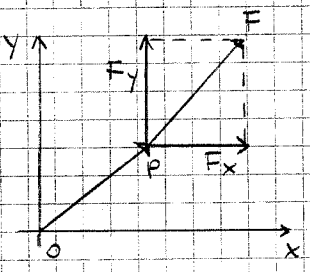
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (y_p \cdot F_z - z_p F_y)\hat{\imath} + (x_p F_z - z_p F_x) \cdot \hat{\jmath} + (x_p \cdot F_y - y_p \cdot F_x)\hat{k} =$$

$$= M_{Ox}\hat{\imath} + M_{Oy}\hat{\jmath} + M_{Oz}\hat{k}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

IL MOMENTO INTORNO ALL'ASSE x (M_{0x}) È DATO DALLE COMPONENTI DI FORZA F_z E F_y MOLTIPLICATE CIASCUNA PER IL PROPRIO BRACCIO (F_x NON COMPARE PERCHÉ È PARALLELO A x) ; STESSA COSA PER GLI ALTRI MOMENTI



$z_P = 0$

$F_z = 0$

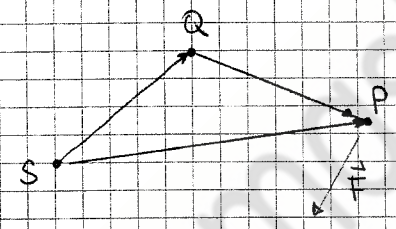
QUINDI RIMANE SOLO M_{0z}

$\vec{M}_0 = (x_P F_y - y_P F_x)\,\hat{k}$

TEOREMA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI

$\vec{M}_S = \vec{M}_Q + \vec{SQ} \wedge \vec{F}$

P PUNTO DI APPLICAZIONE DI $\vec{F}$



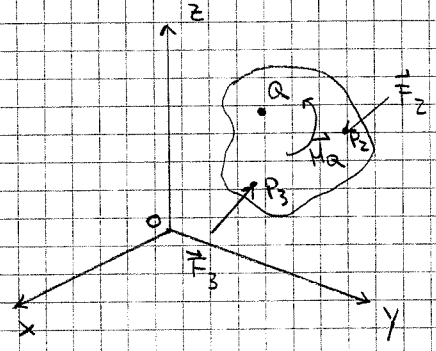
DIMOSTRAZIONE

$$\underbrace{\vec{SP} \wedge \vec{F}}_{\vec{M}_S} = (\vec{SQ} + \vec{QP}) \wedge \vec{F} = (\vec{SQ} \wedge \vec{F}) + (\vec{QP} \wedge \vec{F}) = (\vec{SQ} \wedge \vec{F}) + \vec{M}_Q$$

STATICA DEL CORPO RIGIDO

IL CORPO RIGIDO È IN EQUILIBRIO SE LA RISULTANTE DELLE FORZE E IL MOMENTO RISULTANTE SONO NULLI $\vec{R} = 0$ $\vec{M}_Q = 0$

VEDIAMO CHE QUANDO R È NULLA, IL MOMENTO PUÒ ESSERE CALCOLATO RISPETTO AD UN QUALSIASI POLO, OTTENDO SEMPRE LO STESSO RISULTATO



$\vec{M}_O = \vec{M}_Q + \vec{OQ} \wedge \vec{R} = \vec{M}_Q$

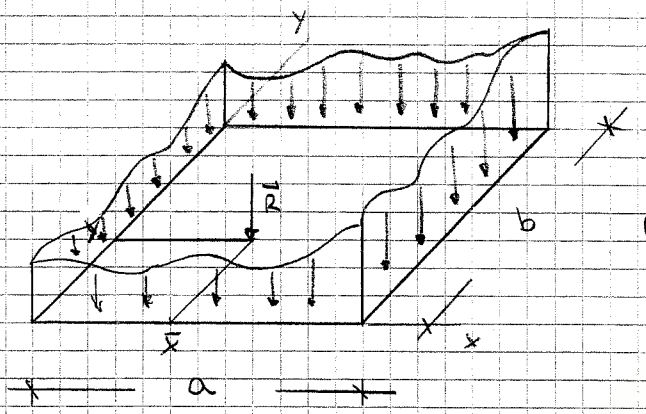
DAL PUNTO DI VISTA SCALARE:

$$\begin{cases} R_x = 0 & \text{EQUILIBRIO} \\ R_y = 0 & \text{ALLA} \\ R_z = 0 & \text{TRASLAZIONE} \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{Ox} = 0 & \text{EQUILIBRIO} \\ M_{Oy} = 0 & \text{ALLA} \\ M_{Oz} = 0 & \text{ROTAZIONE} \end{cases}$$

SISTEMI DI FORZE EQUIVALENTI

HANNO TUTTE LA STESSA $\vec{R}$ E LA STESSA $\vec{M}_0$

DOBBIAMO TRASFORMARE IL CARICO DISTRIBUITO IN UN SISTEMA EQUIVALENTE



$p(x,y)$ → DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE

$$R = \int_A p(x,y)\,dA = \int_0^b \int_0^a p(x,y)\,dx\,dy$$

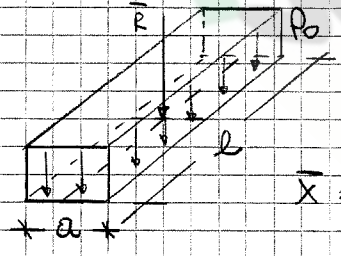
POSSIAMO A QUESTO PUNTO SOSTITUIRE LA DISTRIBUZIONE CON UNA FORZA DI ENTITÀ R

$$\bar{x}R = \int_A p(x,y)\,x\,dA \rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A p(x,y)\,x\,dA}{R}$$

$$\bar{y}R = \int_A p(x,y)\,y\,dA \rightarrow \bar{y} = \frac{\int_A p(x,y)\,y\,dA}{R}$$

$\bar{x}, \bar{y}$ NON SONO ALTRO CHE LE COORDINATE DEL BARICENTRO DEL VOLUME SOTTOSTANTE LA SUPERFICIE DEFINITA DA QUELLA FUNZIONE.

1)

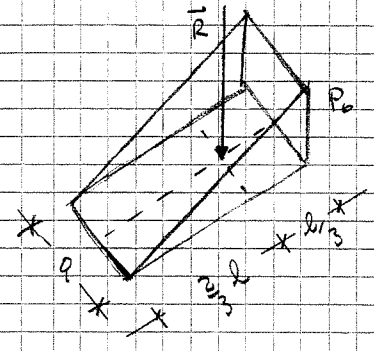


$$R = p_0\,a\,l$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l \int_0^a x\,p_0\,dx\,dy}{p_0\,a\,l} = \frac{\int_0^l p_0 \frac{a^2}{2}\,dy}{p_0\,a\,l} = \frac{p_0 \frac{a^2}{2} l}{p_0\,a\,l} = \frac{a}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^l \int_0^a y\,p_0\,dx\,dy}{p_0\,a\,l} = \frac{\int_0^l y\,p_0\,a\,dy}{p_0\,a\,l} = \frac{\frac{l^2}{2} p_0\,a}{p_0\,a\,l} = \frac{l}{2}$$

2)



$$R = p_0\,a\,l\,\frac{1}{2}$$

$$p(x,y) = \frac{p_0}{l}\,y$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l \int_0^a \frac{p_0}{l}\,y\,x\,dx\,dy}{p_0\,a\,l/2} = \frac{\int_0^l \frac{p_0\,y}{l} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot dy}{p_0\,a\,l/2} =$$

$$= \frac{\frac{p_0}{l} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{l^2}{2}}{p_0 \cdot a\,l/2} = \frac{a}{2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

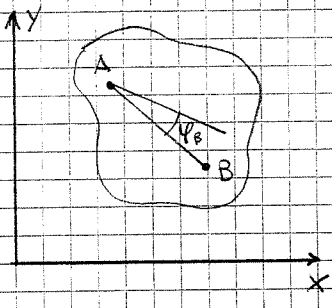
$$\bar{y} = \frac{\int_0^{l}\int_0^{a} \frac{p_0}{l} y^2 \, dx\,dy}{p_0 \, a \, l/2} = \frac{\int_0^{l} a \frac{p_0}{l} y^2 \, dy}{p_0 \, a \, l/2} = \frac{a \frac{p_0}{l} \frac{l^3}{3}}{p_0 \, a \, l/2} = \frac{2}{3} l$$

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

VINCOLI → AGENTI STATICI

VINCOLI
- NELLO SPAZIO → 6 GDL (GRADI DI LIBERTÀ)
- NEL PIANO → 3 GDL (GRADI DI LIBERTÀ)

PIANO



SE DEFINIAMO $A = (x, y)$, IL CORPO PUÒ SEMPRE RUOTARE INTORNO AD A STESSO, OCCORRE QUINDI DETERMINARE UN ALTRO PUNTO PER INDIVIDUARE UNA POSIZIONE PRECISA

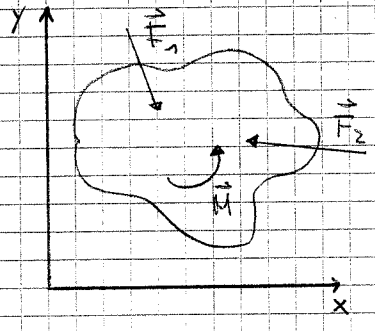
SPAZIO ~~SE DEFINIAMO SOLO A~~, NON OCCORRE DEFINIRE SOLO A DOBBIAMO DEFINIRE ANCHE LA "LATITUDINE" E "LONGITUDINE"

SISTEMA → LABILE: NON È BLOCCATO È QUINDI È LIBERO DI MUOVERSI

→ ISOSTATICO: I VARI VINCOLI BLOCCANO TUTTI I GRADI DI LIBERTÀ

→ IPERSTATICO: SONO PRESENTI PIÙ VINCOLI DI QUANTI SIANO NECESSARI

I VINCOLI ESERCITANO SUI CORPO FORZE TALI DA BLOCCARE IL MOVIMENTO



SE SIAMO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO ISOSTATICO:

RELATIVI ALLE REAZIONI VINCOLARI

$$\vec{R}_e + \vec{R}_v = 0$$

$$\vec{M}_e + \vec{M}_v = 0$$

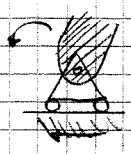
RELATIVI ALLE FORZE ESTERNE

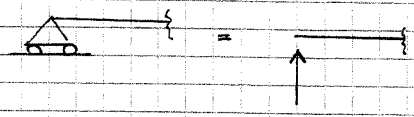
MASTER COPY

Tel. 388/9837745

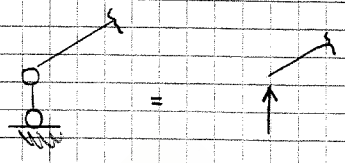
VARI VINCOLI NEL PIANO (I PRINCIPALI)

VINCOLI A 1 INCOGNITA

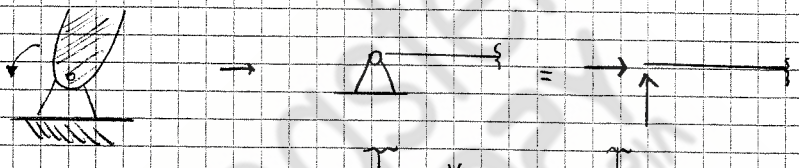


(CARRELLO) → 

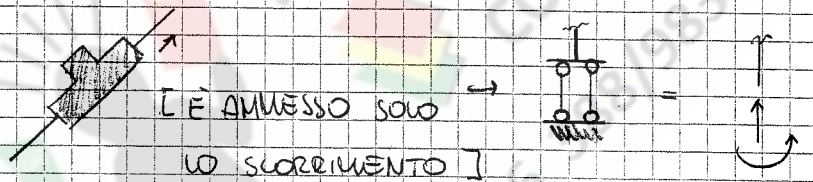
[È AMMESSA LA TRASLAZIONE ORIZ. E LA ROTAZIONE]



VINCOLI A 2 INCOGNITE

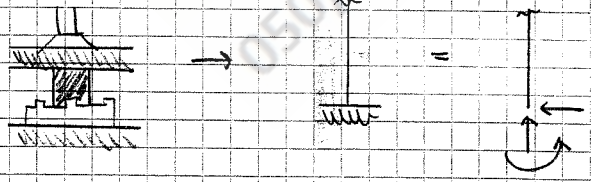
(CERNIERA) 

[È AMMESSA SOLO LA ROTAZIONE]

(BIPENDOLO) 

[È AMMESSO SOLO LO SCORRIMENTO]

VINCOLO A 3 INCOGNITE

(INCASTRO) 

[NON È AMMESSO ALCUN MOVIMENTO]

IL PROBLEMA DELLA STATICA È QUELLO DI DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI INCOGNITE, CONOSCENDO LE FORZE ESTERNE APPLICATE. SOSTITUIREMO I VINCOLI CON LE CORRISPONDENTI REAZ. VINCOLARI INCOGNITE, COME SE IL SISTEMA FOSSE UN CORPO LIBERO NELLO SPAZIO A CUI SONO APPLICATE FORZE.