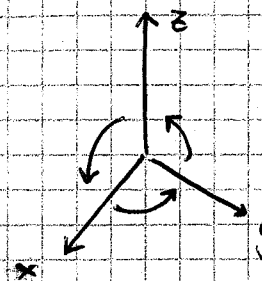
24.09.2012

Le FORZE e i MOMENTI sono vettori applicati, caratterizzati da direzione, verso, intensità e punto di applicazione.

Usiamo una terna di riferimento destra e levogira (cioè se l'osservatore è disposto su z, si ottiene y con una rotazione antioraria di x, e così per gli altri assi).



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$

$\vec{F}_P$ e $\vec{M}_Q$ (si rappresentano con le componenti cartesiane)

$P \equiv \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}$

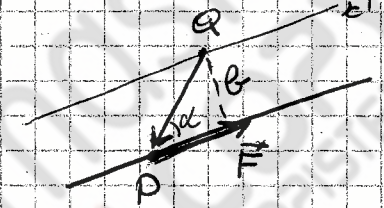
F è la risultante di forze parallele agli assi:

$$\vec{F} = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{M}_Q = (P-Q) \wedge \vec{F}$$

$$|\vec{M}_Q| = \overline{QP} \cdot |\vec{F}| \operatorname{sen}\alpha = F b$$

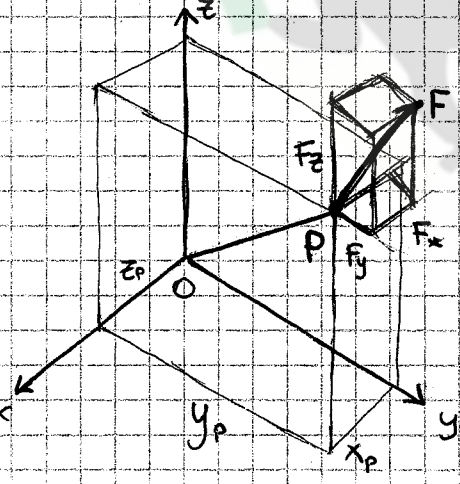
(b = braccio)



M_Q è perpendicolare al piano individuato dal vettore $\overrightarrow{QP}$ e dalla retta r

Il momento non varia allo spostarsi di P lungo la retta di applicazione.

Ragioniamo in termini di componenti anche per il momento:



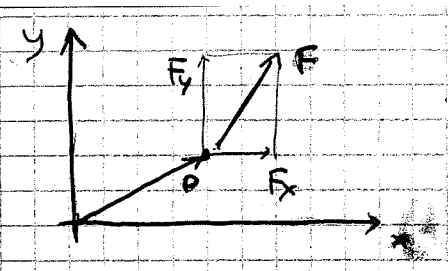
$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_P & y_P & z_P \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (y_P F_z - z_P F_y)\hat{\imath} + (x_P F_z - z_P F_x)\hat{\jmath} + (x_P F_y - y_P F_x)\hat{k}$$

$$= M_{Ox}\hat{\imath} + M_{Oy}\hat{\jmath} + M_{Oz}\hat{k}$$

Il momento intorno all'asse x (M_{Ox}) è dato dalle componenti di forza F_z e F_y moltiplicate ciascuna per il proprio braccio (F_x non compare perché è parallelo a x). Analogamente per le altre due componenti.

Vediamo la situazione nel piano ↴

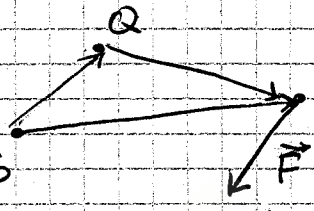


$z_P = 0$ $F_z = 0$ quindi, dalla formula, rimane solo M_{Oz}

$$\vec{M}_O = (x_P F_y - y_P F_x)\hat{k}$$

Teorema di trasposizione dei momenti (in generale il momento dipende dalla scelta del polo)

$$\vec{M}_S = \vec{M}_Q + \vec{SQ} \wedge \vec{F}$$



P punto di applicazione di $\vec{F}$

Dimostrazione:

$$\vec{SP} \wedge \vec{F} = (\vec{SQ} + \vec{QP}) \wedge \vec{F} = (\vec{SQ} \wedge \vec{F}) + (\vec{QP} \wedge \vec{F}) =$$

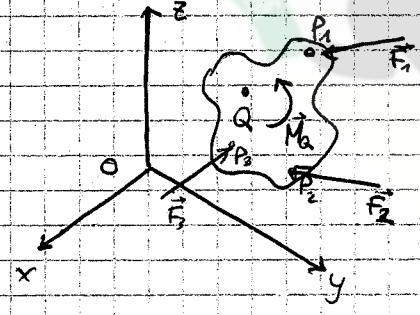
$\vec{SP} \wedge \vec{F} = \vec{M}_S$

$$= (\vec{SQ} \wedge \vec{F}) + \vec{M}_Q$$ ok!

Statica del corpo rigido → [insieme di punti materiali: tenuti insieme da forze interne ed equilibrate l'uno con l'altro sempre fissi a distanza]

Il corpo rigido è in equilibrio se la risultante delle forze e il momento risultante sono nulli. $\vec{R} = 0$ $\vec{M}_Q = 0$

Vediamo che quando R è nullo, il momento può essere calcolato rispetto ad un polo qualsiasi → otteremo sempre lo stesso risultato.



$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q + \vec{OQ} \wedge \vec{R} = \vec{M}_Q$$

Ci permette di scegliere il polo che vogliamo!

Notazione scalare:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$ equilibrio alla traslazione

$$\begin{cases} M_{Ox} = 0 \\ M_{Oy} = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{cases}$$ equilibrio alla rotazione

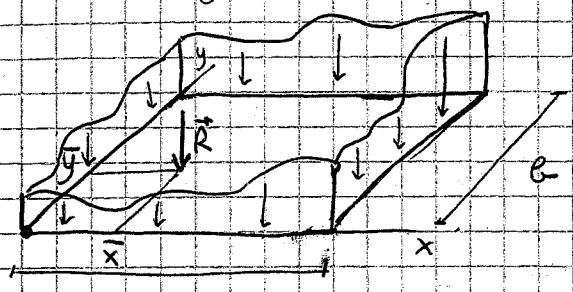
(poi c'era un altro calcolo assurdo sbagliato) e

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

25.09.2012

Sistemi di forze equivalenti → hanno la stessa $\vec{R}$ e la stessa $\vec{M}_0$

Dovremo trasformare il carico distribuito in un sistema equivalente!



$p(x,y)$ → distribuzione di pressione di cui vogliamo trovare la risultante

$$R = \int_A p(x,y)\,dA = \int_0^b \int_0^a p(x,y)\,dx\,dy$$ INTEGRALE DOPPIO

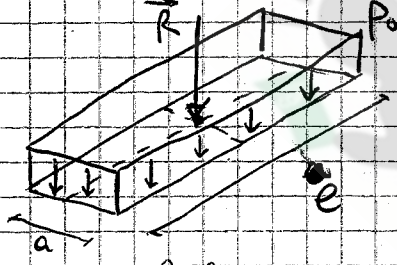
Possiamo sostituire la distribuzione con una forza di entità R

Vediamo il momento: $\bar{x}R = \int_A p(x,y)\,x\,dA \rightarrow \bar{x} = \frac{\int_A p(x,y)\,x\,dA}{R}$

$$\bar{y}R = \int_A p(x,y)\,y\,dA \rightarrow \bar{y} = \frac{\int_A p(x,y)\,y\,dA}{R}$$

Definizione delle coordinate del baricentro del volume sottostante la superficie definita da quella funzione!

1)



$R = p_0 a e$

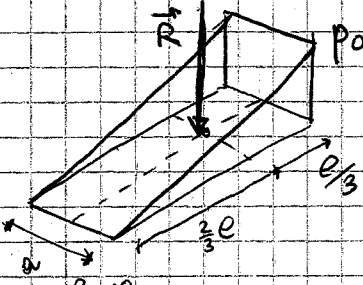
Possiamo sostituire la distribuzione di pressione con un carico R in posizione $e/2$ e $a/2$.

Verifichiamolo

$$\bar{x} = \frac{\int_0^e \int_0^a x p_0\,dx\,dy}{p_0 a e} = \frac{\int_0^e p_0 \frac{a^2}{2}\,dy}{p_0 a e} = \frac{p_0 \frac{a^2}{2} e}{p_0 a e} = \frac{a}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^e \int_0^a y p_0\,dx\,dy}{p_0 a e} = \frac{\int_0^e y p_0 a\,dy}{p_0 a e} = \frac{\frac{e^2}{2} p_0 a}{p_0 a e} = \frac{e}{2}$$ ok!

2)



$R = p_0 a e \cdot \frac{1}{2}$

$p(x,y) = \frac{p_0}{e} y$ (equazione della retta)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^e \int_0^a \frac{p_0}{e} y x\,dx\,dy}{p_0 a e/2} = \frac{\int_0^e \frac{p_0 y}{e} \cdot \frac{a^2}{2}\,dy}{p_0 a e/2} = \frac{\frac{p_0}{e} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{e^2}{2}}{p_0 a e/2} = \frac{a}{2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$$\bar{y} = \frac{\int_0^e \int_0^a \frac{p_0}{e} y^2 \, dx\,dy}{p_0 a e/2} = \frac{\int_0^e a \frac{p_0}{e} y^2 \, dy}{p_0 a e/2} = \frac{a \frac{p_0}{e} \cdot \frac{e^3}{3}}{p_0 a e/2} = \frac{2}{3} e$$

ok!

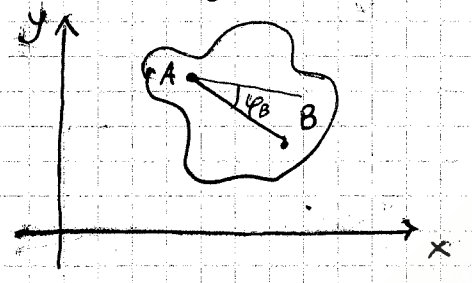
Gradi di libertà e vincoli

Vedremo i VINCOLI come agenti statici, entità in grado di esercitare delle forze.

Nello spazio → 6 gradi di libertà

Nel piano → 3 gradi di libertà

PIANO



Se definiamo $A \equiv (x, y)$, il corpo può sempre ruotare intorno ad A stesso, occorre quindi determinare un altro punto per individuare una posizione precisa.

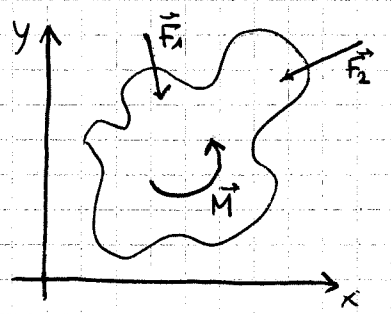
SPAZIO

Se definiamo solo A, un qualsiasi altro punto del sistema può muoversi su una sfera con centro in A, quindi occorrerà definire anche la latitudine e la longitudine. Per individuare un sistema statico, occorre vincolare tutti i gradi di libertà.

Sistema →
- labile: non è bloccato (non ci interessano perché fanno da statica)
- isostatico: i vincoli bloccano tutti i gradi di libertà
- iperstatico: ci sono più vincoli di quanti siano necessari per bloccare il sistema.

27.09.2012

I vincoli esercitano sul corpo forze tali da bloccarne il movimento



Il corpo è vincolato in maniera isostatica se:

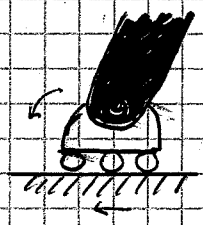
$$\begin{cases} \vec{R}_e + \vec{R}_v = 0 \\ \vec{M}_e + \vec{M}_v = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} R_e \text{ e } M_e \text{ sono relativi alle forze esterne} \\ R_v \text{ e } M_v \text{ sono relativi alle reazioni vincolari} \end{cases}$

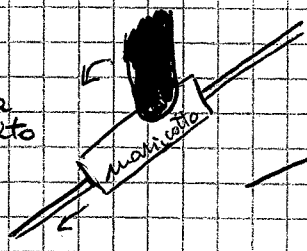
Il sistema delle forze applicate è staticamente equivalente alle reazioni che il corpo esercita sui vincoli (principio di azione e reazione)

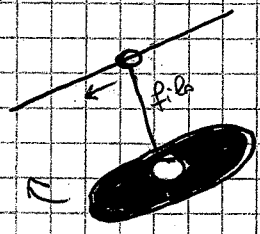
Ora associamo ad ogni grado di libertà tolto una forza o un momento e vediamo i vari casi:

1) **VINCOLO:**







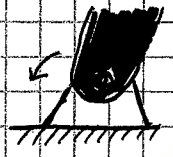


Coppia prismatica + coppia rotoidale: vincolano il grado di libertà perpendicolare alla direzione di scorrimento

REAZIONE:  Forza di direzione nota (⊥ alla superficie)

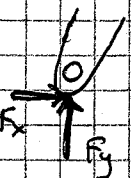
N. INCOGNITE: 1 **SIMBOLO:** 

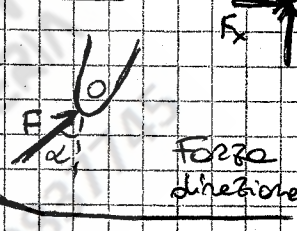
2) **VINCOLO:**



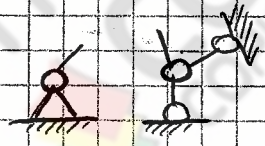


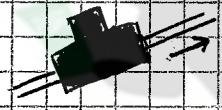
È annullata solo la rotazione.

REAZIONE: 



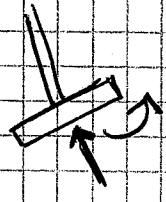
Forza di direzione incognita

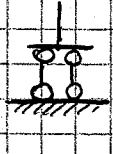
N. INCOGNITE: 2 (modulo e angolo di inclinazione della forza) **SIMBOLO:** 

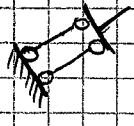
3) **VINCOLO:** 

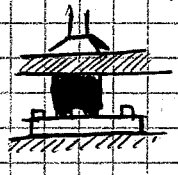
Può solo scorrere ma non ruotare, perché sono bloccati lo spostamento in direzione ⊥ al filo e la rotazione.

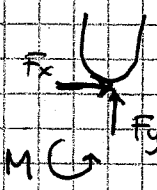
Coppia prismatica.

REAZIONE:  Forza di direzione nota + coppia

N. INCOGNITE: 2 **SIMBOLO:** 

 si chiama BIPENDOLO

4) **VINCOLO:** Incastro 

REAZIONE: 

Forza di direzione incognita + coppia

N. INCOGNITE: 3

SIMBOLO: 

Il problema della statica è quello di determinare le reazioni vincolari incognite, note le forze esterne applicate. Dovremo sostituire i vincoli con le corrispondenti reazioni incognite, come se il sistema fosse un corpo libero