ORALE Algebra

NUMERI COMPLESSI

$$z = a + ib$$

Re — Im

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312128
Cell. 388 9837748

Modulo: $\rho : \sqrt{a^2 + b^2}$

Angomento: $tg\,\alpha : \frac{b}{a}$ - θ

Forma Trigonometrica

$$z = \rho \cdot e^{i\theta} \rightarrow \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Formula di De Moivre (Teorema)

$$z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$$
$$z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$$
$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

DIM

$$z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right]$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i\,(\cos\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\right]$$

$(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \rightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2)$

$+i\,(\cos\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2 + \cos\theta_2\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \rightarrow +i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

$f: A \to B$ è INIETTIVA

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Equivalent: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$f: A \to B$ è SURIETTIVA

se $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$

(INIETT. & SURIETT. = BIGETTIVA)

Teorema di Ruffini

α RADICE $\Leftrightarrow (x-\alpha)$ divide $p(x)$

ovvero $p(x) = (x-\alpha) \cdot q(x)$

con grado $q(x) = n-1$

Molteplicità di una radice

α RADICE ha molteplicità $= m$

se $(x-\alpha)^m$ divide $p(x)$

e $(x-\alpha)^{m+1}$ NON divide $p(x)$

Problema: In $\mathbb{R}$ non sempre $\exists$ RADICI

e ci aiutano i Complessi

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

e si semplifica tutto con:

Il teorema fondamentale dell'Algebra

Dato $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado $= n$
allora $p(z)$ ha esattamente n RADICI
(contate con Molteplicità)

Propn. Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$
allora α RADICE $\Leftrightarrow \overline{\alpha}$ RADICE

DIM.

Sia $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$
e sia α RADICE: $p(\alpha) = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Ip: $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
- Tesi: $\overline{\alpha}$ RADICE cioè $p(\overline{\alpha}) = 0$

$$p(\overline{\alpha}) = a_0 + a_1\overline{\alpha} + \dots + a_n(\overline{\alpha})^n$$

MA: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \rightarrow a_0 = \overline{a_0}$, $a_1 = \overline{a_1}$, $a_n = \overline{a_n}$ & $\overline{a_1 \cdot \alpha} = \overline{a_1}\,\overline{\alpha}$, $\overline{a_n \cdot (\alpha)^n} = (\overline{a_n \cdot \alpha^n})$

cioè

$$p(\overline{\alpha}) = \overline{a_0} + (\overline{a_1\alpha}) + \dots + (\overline{a_n\alpha^n})$$

$$= \overline{\left(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n\right)} = \left(\overline{p(\alpha)}\right)$$

Poiché $p(\alpha) = 0$ abbiamo $p(\overline{\alpha}) = (\overline{p(\alpha)}) = \overline{0} = 0$

□

Spazi Vettoriali

proprietà: { direzione, verso, intensità (modulo)

Operazioni: • somma
• moltiplicazione per uno scalare

Def: V si dice uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se $\exists$ un'operazione di somma e un'operazione di prodotto per scalare che verificano proprietà:

SOMMA {
- associative $(v+w)+z = v+(w+z)$
- commutative $v+w = w+v$
- elemento neutro $v+0_V = v$
- $v-v = 0$ $[\forall \vec{v} \exists -v$ t.c. $v+(-v) = 0_V]$

PRODOTTO PER SCALARE {
- $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$
- $\lambda(v_1+v_2) = (\lambda \cdot v_1) + (\lambda \cdot v_2)$
- $\lambda_1(\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\cdot v$
- $1 \cdot v = v$

- V_0^1 : { insieme dei vettori di una retta applicati in O }
- V_0^2 : { vettori del piano applicati in O }
- V_0^3 : { vettori contenuti nello spazio 3D }

Definizione prodotto per scalare

Dato λ scalare e $\vec{v} = \vec{AB}$, il prodotto scalare è $\vec{AB} = \vec{AB'}$

$\vec{AB'}$ ha la stessa direzione di $\vec{AB}$, intensità variabile e stesso verso.

Se λ è > 0 o < 0 hanno verso opposto

[Relazione di equivalenza: $\vec{AB} \sim \vec{A'B'} \Leftrightarrow \vec{AB}$ e $\vec{A'B'}$ hanno stessa direzione, modulo e intensità]

Combinazione Lineare

Considerato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e dati $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ si dice combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ tramite $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ il vettore $v_1 \cdot \lambda_1 + v_2 \cdot \lambda_2 + \dots + v_n \cdot \lambda_n$

Span

Considerati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, lo span di $v_1, \dots, v_n$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari.

Linearmente DIP o IND

L'insieme dei vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ NON nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$

L'insieme dei vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in V$ si dicono linearmente indipendenti se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ se e solo se $\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0$

* LIN DIP: Se la comb. lin. genera 0_V
* LIN. IND: Se la comb. lin. genera 0_V se i lambda sono 0