01-10-20

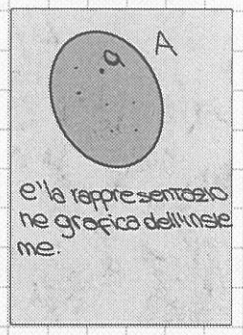
Insiemi

- elencazione
- caratteristica
- Eulero Venn

Un insieme è una collezione di oggetti

notazione: $A = \{\text{elementi con una certa proprietà}\}$

Insieme vuoto: $\varnothing$
↳ insieme che non contiene elementi



è la rappresentazione grafica dell'insieme.

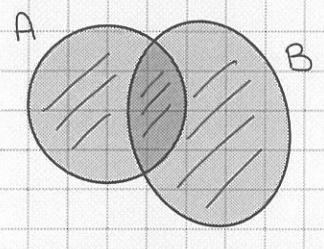
a – elemento di un insieme a = notazione: $a \in A$

Gli insiemi si possono rappresentare tramite i diagrammi di Eulero-Ven

master COPY

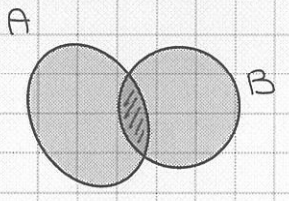
Operazioni fra insiemi

unione: $A \cup B$



$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$
(1) tali che (1) notazione alternativa
oppure → $\vee$
↳ o, non esclusivo
va bene o una condizione o l'altra, basta una.

intersezione: $A \cap B$

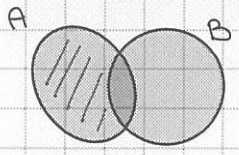


$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

master COPY

l'intersezione corrisponde a dire e ($\wedge$)
devono essere verificate entrambe le condizioni

differenza: $A \setminus B$



$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
tolgo gli elementi dell'intersezione

master COPY

Simboli
$\forall$ "per ogni"
$\exists$ "esiste"

Negazione logica
simboli: ν o /
nego un'affermazione in maniera logica e non è verificata la condizione quindi "ν"

Implicazione logica
Se vale una proprietà P allora vale una proprietà q. Si scrive
$P \Rightarrow q$
↳ implicazione logica
"Se parto da p con ragionamenti arrivo a q

Equivalenza logica
Vale una proprietà p se e soltanto se vale una proprietà q e si scrive
$p \Leftrightarrow q$
Se parto da p con ragionamenti logici a q e viceversa

Osservazione: negare la frase $p \Rightarrow q$ è equivalente a scrivere la frase "$\nu q \Rightarrow \nu p$"
non q implica non p e si inverte il verso della freccia

$p \Rightarrow q$ corrisponde a fare $\neg q \Rightarrow \neg p$

$p \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg p$ Dimostrazione x assurdo

Esempi:

p = "n e' multiplo di 4"
q = "n e' numero pari"
} frasi matematiche

*altro esempio: triangolo equilatero

$p \Rightarrow q$ se n e' multiplo allora n e' pari

$\neg q \Rightarrow \neg p$ se n non e' pari allora n non e' multiplo

Importante

Negare $\forall$ $\iff$ affermare $\exists$ negazione

p: "$\forall$ partita della Juve la Juve vince"

negazione: $\neg p$: "$\exists$ una partita della Juve in cui non vince"

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ numeri interi relativi

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali $= \left\{ \frac{a}{b} : \begin{matrix} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{matrix} \text{ con } b \neq 0 \right\} / \sim$ diviso la relazione di equivalenza identifico

↳ relazione di equivalenza $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \iff a \cdot b = a \cdot b'$

In $\mathbb{Z}$ esiste un'operazione $+$ che verifica le proprietà

1. associativa $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. commutativa $a+b = b+a$
3. $\exists$ elemento neutro $= 0$ t.c. $0+a = a \ \forall a$
4. $\forall a \ \exists -a$ t.c. $a+(-a) = 0$ e: l'opposto di a (la sottrazione e' aggiungere)

In $\mathbb{Q}$ $\exists$ operazioni $+, \cdot$

* $+$ verifica 1.2.3.4
* $\cdot$ verifica

5. associativa $(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a$
6. commutativa $a \cdot b = b \cdot a$
7. $\exists$ elemento neutro $= 1$ t.c. $1 \cdot a = a \ \forall a$
8. $\exists$ elemento moltiplicativo $\forall a \neq 0 \ \exists a^{-1}$ tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ $a^{-1} = 1/a$ reciproco

9. Proprietà di collegamento tra $+, \cdot$:

proprietà distributiva $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

DEF: Un insieme numerico con operazioni $+, \cdot$ che verifica $1, \dots, 9$ si dice CAMPO

$\mathbb{Q}$ e' un campo, non l'unico, $\mathbb{R}$ e' un campo

$\mathbb{Q}$ e' un campo

$\mathbb{R}$ e' un campo

$\mathbb{N}$ non e' un campo poiché non esiste $-a$ es: $a = 5$ $-a = -5 \in \mathbb{N}$ opposto (eccezione)

$\mathbb{Z}$ non e' un campo poiché non esiste a^{-1} es: $a = 5$ $a^{-1} = 1/5 \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$ e' l'insieme dei numeri reali

un numero reale α e' individuato da una successione di intervalli di ampiezza che tende a 0:

esempio:

$\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

idea: operiamo approssimazioni per eccesso e difetto

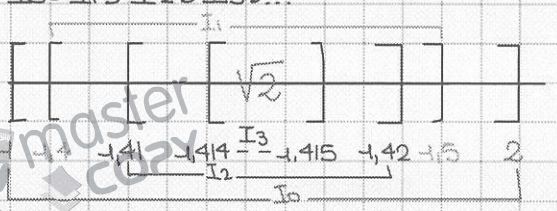
$I_0 = [1,2]$

$I_1 = [1,4 ; 1,5]$

$I_2 = [1,41 ; 1,42]$

$I_3 = [1,414 ; 1,415]$

$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$



oss: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

prop: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

dim per assurdo

Supponiamo:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ primi fra loro

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$

$a^2 = 2b^2$

a^2 e' pari, a e' pari

b^2 e' pari, b e' pari

a e b sono pari

$\Rightarrow$ assurdo perche' avevamo supposto che fossero primi fra loro

Data una retta r se fissiamo un'origine o unita' di misura, ovvero fissiamo 0 e 1 allora: l'insieme dei punti della retta corrisponde all'insieme dei numeri reali

{punti della retta} $\overset{a \to 1}{\longleftrightarrow}$ {numeri reali}

1 elemento a sinistra corrisponde a quello a destra



Relazioni tra insiemi numerici

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (↳ contenuto)

In questi insiemi (in $\mathbb{R}$ e quindi anche in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) esiste una relazione d'ordine (totale) $\leq$ quindi $a \leq b \iff b - a \geq 0$

se e solo se

N.B.: $\leq$ significa minore o uguale

quindi in $\mathbb{R}$ abbiamo un verso:



$-5 \leq -4 \leq -3 \leq 0 \leq \sqrt{2} \leq \pi$

In $\mathbb{Z}$ ✓ soluzione dell'equazione $3x + 21 = 0$ $x = -7$

In $\mathbb{Z}$ ✗ soluzione dell'equazione $3x + 22 = 0$

In $\mathbb{Q}$ ✓ soluzione dell'equazione $3x + 22 = 0$ $x = -22/3$

In $\mathbb{Q}$ ✗ soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ perche' non ci sono radici

In $\mathbb{R}$ ✓ soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

Dato $a \geq 0$

$\sqrt{a}$ e' l'unico numero reale positivo t.c. $(\sqrt{a})^2 = a$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

anche $\sqrt{3}$ o π

radice di n positivo con n in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ ∄ soluzione dell'equazione $x^2+1=0$

Idea: introduciamo un nuovo numero immaginario

$i=\sqrt{-1}$ unità immaginaria

proprietà: $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$

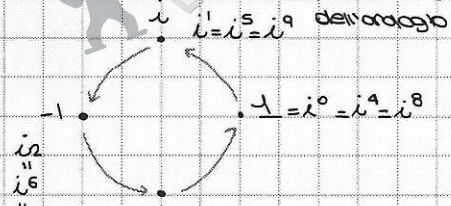
2-10-20

$i=\sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria

vogliamo trattare i come un numero

potenze di i

$i^0=1$
$i^1=i$
$i^2=-1$
$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$
$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot -1=1$
$i^5=i^4\cdot i=i$
$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot -1=-1$
ecc...



quello che conta è il resto della divisione per 4

quozziente

$i^{121}=121:4=30\cdot 4+1$ resto

$i^{121}=(i^4)^{30}\cdot i^1=i$ guardo solo il resto

- $i^{17}=i^{16}\cdot i^1=1\cdot i=i$
- i^{50} = div. con resto
  $50:4=12$ resto 2
  $12\cdot 4+2\rightarrow i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2$
  $=-1$ ($i^4=1$, $i^2=-1$)
- $i^{75}=75:4=18\ r\ 3$
  $(i)^{18}+i^3=i^2\cdot i=-i$
- $i^{63}=4\cdot 15\ r\ 3$
  $i^3=-i$

Se vogliamo risolvere $x^2=-4\rightarrow \pm\sqrt{-4}$

$-4=(4)(-1)\rightarrow$ proprietà delle radici $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$

$x^2+x+1=0$ Soluzioni: $\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ → sarebbe $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3}$

$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

un elemento di $\mathbb{C}$ ($z\in\mathbb{C}$) si scrive nella forma $z=x+iy$ con $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$

lettere convenzionali

$x=Re(z)$ parte reale

$y=Im(z)$ parte immaginaria di z

esempi:

$z=5+i4\rightarrow$ parte immaginaria $Im(z)$
↳ parte reale $Re(z)$

$z=-3+i2\rightarrow$ parte immaginaria $Im(z)$
↳ parte $Re(z)$

master COPY

operazioni:

In $\mathbb{C}$ esistono operazioni $+$ e $\cdot$

Somma:

$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$
$\Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ (raggruppo)

Esempi

* $z_1 = 3 + i4$, $z_2 = -2 + i5 \Rightarrow 3 + (-2) + i(4+5) = -1 + 9i$

* $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 5 + 2i \Rightarrow -5 + 5 + i(-1+2)$, $0 + i3 \to 3i$
  è commutativo

prodotto:

$i \cdot i = i^2 = -1$

$z_1 = 3 + i2$
$z_2 = -1 + i4$
$\Rightarrow$ p. di omologia $(3 + i2)(-1 + i4) = 3 + i12 + i2 + i^2 8 = -5 + i14$, $i^2 \to -8$

In generale: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$
$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (si adagia normalmente)
perché ricordo $i^2 = -1$

In $\mathbb{C}$ valgono tutte le proprietà numeriche di $\mathbb{R}$
non vale la **relazione d'ordine**: non si può parlare di un numero + grande o più piccolo

$5 \cdot (3 + i2) = 5 \cdot 3 + i(5 \cdot 2)$

oss. possiamo identificare $\mathbb{R}$ come l'insieme dei $\mathbb{C}$ tc la parte immaginaria di $z = 0$

* il gruppo $\mathbb{R}$ può essere considerato come gruppo $\mathbb{C}$ se la parte immaginaria di $z = 0$

$\mathbb{R} \leftrightarrow \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0\}$ ovvero $x \leftrightarrow x + i0$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Teorema

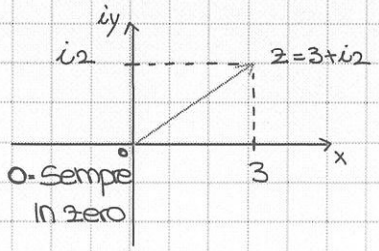
$\mathbb{C}$ può essere considerato un campo $(\mathbb{C}; +; \cdot)$

Rappresentazione numeri complessi

Il Piano di Gauss sono stati coperti a fine 700. con la rappresentazione capirono l'importanza perché erano rappresentati e visibili

$\mathbb{R} = \{x\} \leftrightarrow$ retta con coordinate x

$\mathbb{C} = \{x + iy\} \leftrightarrow$ piano con coordinate x, y



$z = x + iy$ lo rappresentiamo come vettore (punto finale) di coordinate $(x; y)$
↳ perché hanno origine in $0; 0$ e quindi metto il punto finale