INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{\text{insieme dei numeri naturali}\} = \{0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{insieme dei numeri interi relativi}\} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ (numero + segno)

$\mathbb{Q} = \{\text{insieme dei numeri razionali}\} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0\right\}$

$\mathbb{R} = \{\text{insieme dei numeri reali}\}$ · sono numeri approssimabili, detti "intervalli inscatolati".

$\forall x \in \mathbb{R}$ questo può essere messo in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta.

Dunque tra i diversi insiemi numerici troviamo la seguente relazione:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ è definito come CAMPO.

In $\mathbb{R}$ esiste la "relazione d'ordine" ($\geq$), dimostrato dal fatto che gli assi cartesiani hanno sempre una freccia che ci indica in quale direzione i numeri crescono.

GLI INSIEMI

L'insieme è un concetto primitivo del quale non possiamo dare una definizione precisa, se non definendolo come "collezione di oggetti", ma, al contrario, possiamo definire come questo può essere presentato:

- elenco

$A = \{1, 2, 3 \ldots\}$

· non conta l'ordine
· non è funzionale nel caso in cui abbi un numero illimitato di elementi

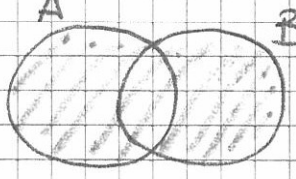
- proprietà caratteristica

$A = \{x \in \in \mid x \text{ gode di una determinata proprietà}\}$

Relazioni tra insiemi

- Unione (alternazione)

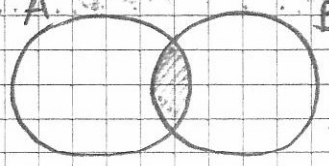
$\begin{cases} x \in A \\ \text{o} \\ x \in B \end{cases}$ $\quad A \cup B$



master COPY

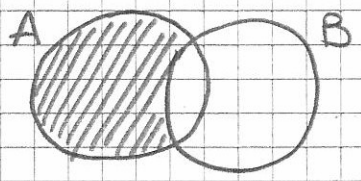
- intersezione (congiunzione)

$\{x \in A \text{ e } x \in B \qquad A \cap B$



- differenza

$\{x \in A \text{ e } x \notin B \qquad A \setminus B$



INSIEME FONDAMENTALE = insieme vuoto o insieme privo di elementi: $\emptyset$; genera insiemi DISGIUNTI

- prodotto cartesiano

È l'insieme delle coppie ordinate degli elementi $a \in A$ e degli elementi $b \in B$.

$A = \{1,2,3\}$

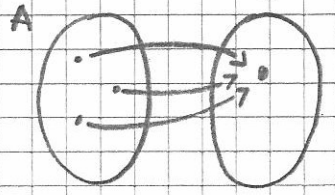
$B = \{7,8,9\}$

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (1,7)(1,8)(1,9) \\ (2,7)(2,8)(2,9) \\ (3,7)(3,8)(3,9) \end{Bmatrix}$$

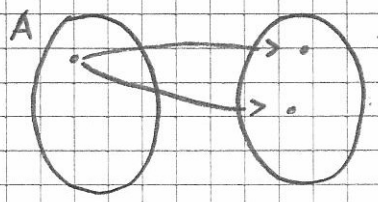
"prodotto" perché il numero delle coppie è pari al prodotto degli $a \in A$ e dei $b \in B$.

- funzione

Dati due insiemi A e B si definisce funzione la legge che associa ad ogni elemento di A un unico elemento di B.

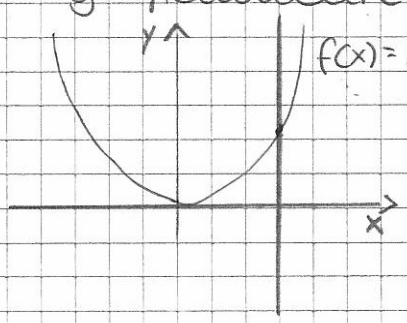


È FUNZIONE



NON È FUNZIONE

graficamente:



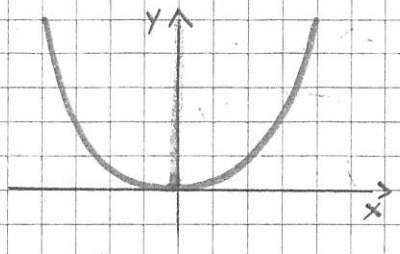
- si definisce f(x) una funzione se e solo se, tracciando una linea verticale, quest'ultima incontra la funzione in un punto soltanto.

Immagine di f(x) [Im(f)]

Si definisce Im(f) l'insieme degli elementi che A manda in B, con la relazione $b = f(a)$, dove dunque b è immagine di a tramite f.

$Im(f) = \{ b \in B \mid \exists a \in A \Rightarrow b = f(a) \}$

$Im(f) \subseteq B$ => ovvero l'immagine di f è un sottoinsieme di B.



$f(x) = x^2$

$Im(f) \Rightarrow x = 0$

• l'immagine di f è l'insieme dei punti di f proiettati sull'asse delle y.

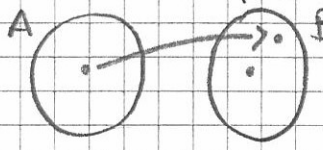
Tipologie di funzioni

• funzioni suriettive o surgettive

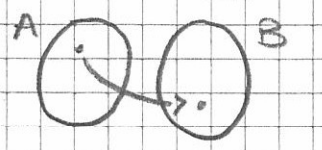
$f: \begin{matrix} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}$ è suriettiva se $\forall b \in B \; \exists a \in A \mid f(a) = b$

dunque una funzione si può definire suriettiva se e solo se ogni elemento di B ha il suo corrispondente in A

oss. se f è suriettiva $\Longleftrightarrow Im(f) = B$



NON È SURIETTIVA



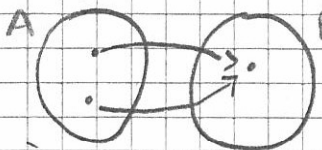
È SURIETTIVA

• funzioni iniettive

$f: \begin{matrix} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}$ è iniettiva se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

dunque una funzione si può definire iniettiva se e solo se ogni elemento di B ha un unico corrispondente in A

oss. $f(a_1) = f(a_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2$



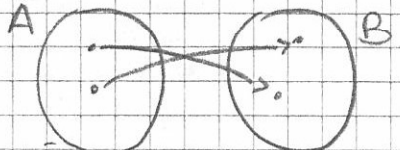
NON È INIETTIVA



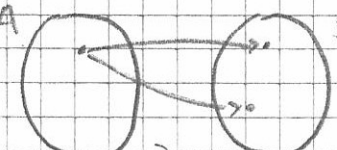
È INIETTIVA

• funzioni biettive o bigettive

$f: \begin{matrix} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}$ è biettiva se f è sia iniettiva che suriettiva (CORRISPONDENZA BIUNIVOCA)



È BIETTIVA



NON È BIETTIVA

Cardinalità di un insieme (#)

notazione $\#A$ = "numero di elementi di A"

OSS.
1. se $f: A \to B$ è iniettiva $\Rightarrow \#A \leq \#B$
2. se $f: A \to B$ è suriettiva $\Rightarrow \#A \geq \#B$
3. se $f: A \to B$ è biettiva $\Rightarrow \#A = \#B$

∞ : si definisce infinito un insieme nel quale posso instaurare una corrispondenza biunivoca tra un insieme ed un suo sottoinsieme.

NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

Sono stati creati per dare una soluzione a quelle equazioni che non avevano soluzioni in $\mathbb{R}$.
Graficamente l'insieme dei numeri complessi corrisponde al "piano di Gauss".

Graficamente:

grafico dell'insieme $\mathbb{R}$ (rami)

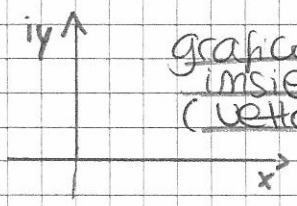


grafico dell'insieme $\mathbb{C}$ (vettori)

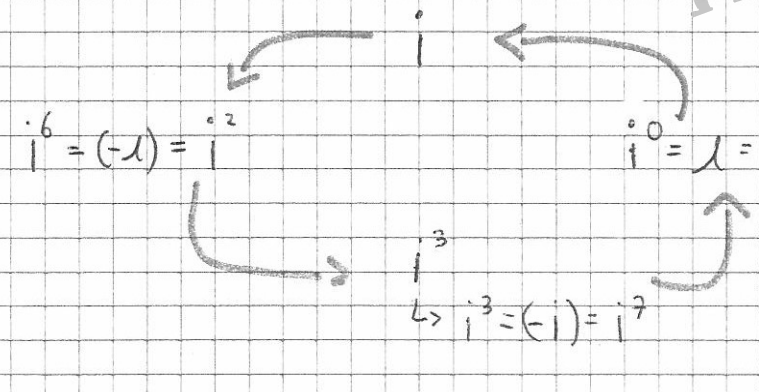
Nei numeri complessi è stata introdotta un'**unità immaginaria** i, tale che:

$$i = \sqrt{-1} \qquad \mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALE $\Rightarrow i^2 = -1$

- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
- $i^{1450} = i^{1448} \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$

$\Rightarrow$ dobbiamo considerare il resto rispetto alla divisione per 4.



Dato un numero complesso $z = x + iy$:

$$Z = \underbrace{X}_{\text{parte reale di } z \; (\mathrm{Re}(z))} + \underbrace{iy}_{\text{parte immaginaria di } z \; (\mathrm{Im}(z))}$$



Tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ esiste la seguente relazione:

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$x \longmapsto x + i0$

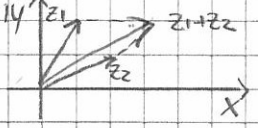
questo i numeri reali sono numeri complessi la cui parte immaginaria è pari a zero.

Operazioni con i numeri complessi

- somma

dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$

allora $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$



- prodotto

dati due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$

allora $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Inoltre l'insieme dei numeri complessi ha:

- l'elemento neutro 0 "zero" per la somma e 1 per il prodotto.
- l'opposto

se $z = x + iy$ allora $-z = -(x + iy) \Rightarrow -x + i(-y)$

- il reciproco

Per fare il reciproco di un numero complesso devo razionalizzare:

$$(x+iy)^{-1} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ $\Rightarrow$ dunque l'insieme $\mathbb{C}$ può essere definito come CAMPO.

- coniugio

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \longmapsto \bar{z}$ "coniugato di z"

- il coniugato di z, è $\bar{z}$ stesso al quale si cambia il segno della y; riflessione rispetto a x.