NUMERI COMPLESSI

L'equazione $3x=4$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}$

L'equazione $x^2=2$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$ $\quad x=\begin{cases}+\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{cases}\in\mathbb{R}$

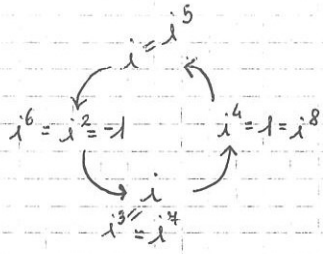
L'equazione $x^2=-1$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$

$i=\sqrt{-1}$ UNITÀ IMMAGINARIA $\quad \boxed{i^2=-1}$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot(-1)=1$

$i^{1450}=-1=i^{1448}\cdot i^2$ ($i^{1448}=1$, $i^2=-1$)



devo considerare resto rispetto alla divisione per 4

$x^2=-4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}=\pm i2$

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Numero complesso $z=x+iy$ con $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, i^2=-1$

$x=Re(z)$ PARTE REALE $\qquad y=Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$\mathbb{C}=\{\text{numeri complessi}\}$ $\qquad \mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ $\quad x\longmapsto x+i\cdot 0$

Esempi $\quad 5+i2\in\mathbb{C}$ $\quad -3-2i\in\mathbb{C}$ $\quad 0=0+i0\in\mathbb{C}$ $\quad \pi=\pi+i0\in\mathbb{C}$ $\quad 1=1+i0\in\mathbb{C}$

OPERAZIONI:

SOMMA $\quad z_1=5+i2,\ z_2=3+i7 \Rightarrow z_1+z_2=8+i9=(5+3)+i\cdot(2+7)$

PRODOTTO $\quad z_1=5+i2,\ z_2=3+i7 \Rightarrow z_1\cdot z_2=(5+i2)\cdot(3+i7)=5\cdot3+i6+i35+i^2 14=1+i41$ ($i^2=-1$)

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

OPPOSTO $\quad z=x+iy \quad -z=-(x+iy)=-x+i(-y)$

$z=3+i4 \quad -z=-3+i(-4)=-3-i4$

ZERO $\quad 0=0+i0$ Elemento NEUTRO della SOMMA

UNO $1 = 1 + i0$ elemento NEUTRO del PRODOTTO

RECIPROCO $(3+i4)^{-1} = \frac{1}{3+i4}$ Uso razionalizzazione $\frac{1}{3+i4} \cdot \frac{3-i4}{3-i4} = \frac{3-i4}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} - i\left(\frac{4}{25}\right)$

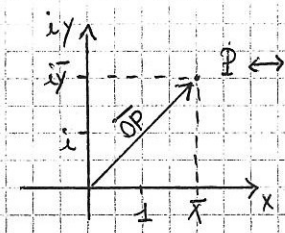
$\mathbb{C} = \{z = x+iy \,/\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ Insieme dei numeri complessi

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\quad \forall m\ \mathbb{C}\ \exists$ operazione $+, \cdot$
$x \longmapsto x + i0$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un CAMPO $\quad \mathbb{R} = \{x\} \longleftrightarrow$ Punti sulla retta $\quad$ Analogamente

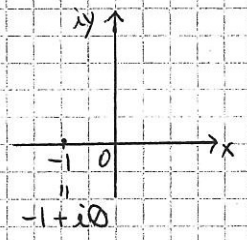
$\mathbb{C} = \{x+iy\} \longleftrightarrow$ PUNTI SUL PIANO (VETTORI)

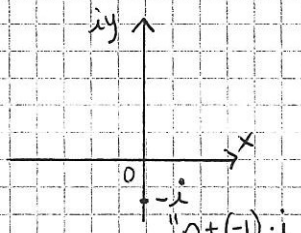
PIANO DI GAUSS

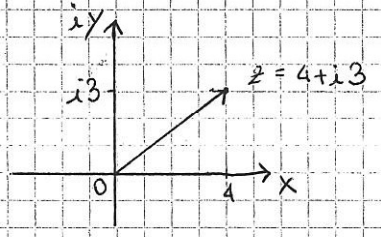


$P \longleftrightarrow \bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$ $\quad$ Possiamo considerare P punto OPPURE vettore $\overrightarrow{OP}$

Esempi

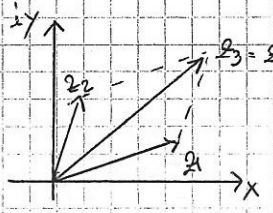






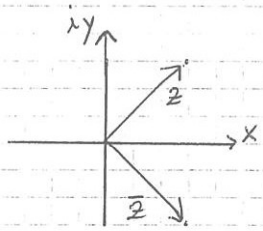
$\mathbb{R} \Longleftrightarrow$ corrisponde all'asse delle $x = \{y = 0\}$ $\quad i\mathbb{R} =$ immaginari $\Longleftrightarrow$ asse $iy = \{x = 0\}$ (no Re) PURI

La somma $\Longleftrightarrow$ SOMMA VETTORIALE



master COPY

ALTRE OPERAZIONI IN $\mathbb{C}$



- CONIUGIO $\quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $z \mapsto \bar{z}$ coniugato di z

> $z = x+iy \longmapsto \bar{z} = x-iy \qquad z \in \mathbb{R} \iff y=0 \iff z=\bar{z}$

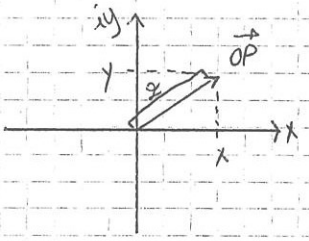
> $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy \Rightarrow z+\bar{z} = 2\,Re(z) = 2x$

> $z-\bar{z} = i\,2y = i\,2\,Im(z)$

PROPRIETÀ

1) $(\bar{\bar{z}}) = z$ $\qquad$ 2) $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\qquad$ 3) $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

- MODULO (o NORMA) di z



notazione: $|z|$ $\qquad$ Def: $z = x+iy$ $\qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z \leftrightarrow$ vettore $\vec{OP}$ $\qquad |z| =$ lunghezza del vettore $\vec{OP}$

PROPRIETÀ

1) $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\qquad \boxed{|z|=0 \iff z=0}$

2) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ $\qquad$ Disuguaglianza vettoriale

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

1) $z = x+iy \qquad |z|^2 = x^2+y^2 = (x+iy)\cdot(x-iy) = z \cdot \bar{z}$

2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1$ $\quad$ con $z \neq 0$ $\qquad \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

Esempio

$z = 2+i5 \qquad \bar{z} = 2-i5 \qquad |z| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

$z^{-1} = \frac{2-i5}{(\sqrt{29})^2} = \frac{2-i5}{29} = \frac{2}{29} + i\left(\frac{-5}{29}\right) \qquad -z = -2-i5 \qquad 3z = 6+i15$

$z \cdot (2+i5) = 1+i3 \qquad z = \frac{(1+i3)}{(2+i5)} = (1+i3)\cdot(2+i5)^{-1} = (1+i3)\cdot\frac{2}{29} + i\left(\frac{-5}{29}\right) =$

$z = \left(\frac{2}{29} + \frac{15}{29}\right) + i\left(\frac{-5}{29} + \frac{6}{29}\right) = \left(\frac{17}{29} + i\,\frac{1}{29}\right)$

POLINOMI

$\mathbb{R}[x] = \{$polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ nella variabile $x\}$

$\mathbb{R}[x] \ni P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ___ + a_n x^n$ $\quad n =$ grado $\quad a_i \in \mathbb{R}$

RADICE di un POLINOMIO

α è RADICE di $P(x) \in \mathbb{R}[x] \iff p(\alpha) = 0$ $\quad$ α è soluzione dell'equazione $p(x) = 0$

$\exists$ Radici? Quante sono? Come si trovano?

$\hookrightarrow P(x)$ di grado $n \geq 5$ non $\exists$ formula risolutiva generale

TEOREMA DI RUFFINI

α è RADICE di $p(x) \iff (x-\alpha)$ divide $p(x)$ $\quad$ cioè $p(x) = (x-\alpha) \cdot p_1(x)$

α è RADICE di $p(x)$ $\quad$ m è la molteplicità (algebrica) di α

$\hookrightarrow$ se $(x-\alpha)^m$ divide $p(x)$ e $(x-\alpha)^{m+1}$ non divide $p(x)$

Esempi

1) $p(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 = x^4 (x^2 + 2x + 1) = x^4 \cdot (x+1)^2$

RADICI: $0, -1$

molt$(0) = 4$ perché ho x^4

molt$(-1) = 2$ perché ho un quadrato

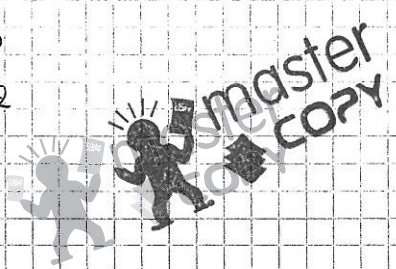
2) $p(x) = x^3 \cdot (x-2)^5 \cdot (x+3)^2$

RADICI:

0 molt $= 3$

2 molt $= 5$

-3 molt $= 2$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Dato $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado $= n$

ALLORA $p(x)$ ha esattamente $\underbrace{n \text{ radici}}_{\in \mathbb{C}}$ contate con molteplicità

In particolare:

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado $n \Rightarrow p(x)$ ha n radici contate con molteplicità in $\mathbb{C}$

master COPY

PROPOSIZIONE $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

α RADICE di $p(x) \iff \bar{\alpha}$ radice di $p(x)$

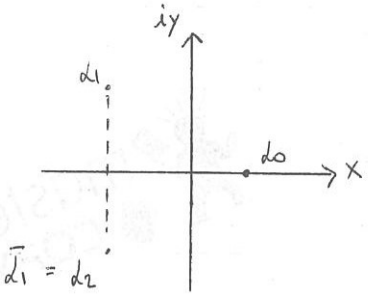
Esempio $p(x) = x^3 - 1$

$p(x) = (x-1)(x^2+x+1)$

RADICI:

$(x-1) = 0 \to \alpha_0 = 1$

$x^2+x+1 = 0 \to \alpha_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



master COPY

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE

$p(x) = a_0 + a_1 x + ___ + a_n x^n$ con $a_0, a_1, ___, a_n \in \mathbb{R}$

In particolare $a_i = \bar{a}_i \ \forall i$

Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ RADICE $\Rightarrow p(\alpha) = 0$

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ___ + a_n\alpha^n = 0$$

Applichiamo il coniugio a destra e sinistra

$$\overline{a_0 + a_1\alpha + ___ + a_n\alpha^n} = \bar{0}$$

MA $\bar{0} = 0$ e CONIUGIO SOMMA e PRODOTTO

SOMMA e PRODOTTO "dei CONIUGATI"

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_n(\bar{\alpha})^n + ___ = 0$$

$a_0, a_1, _, a_n \in \mathbb{R} \Rightarrow a_0 = \bar{a}_0, ___, a_n = \bar{a}_n$

$$\overline{p(\alpha)} = 0 \iff a_0 + a_1\bar{\alpha} + ___ + a_n(\bar{\alpha})^n = 0 \iff p(\bar{\alpha}) = 0$$

□