26/11/2020

NUMERI

numero elemento di un insieme numerico

Insieme: raggruppamento di elementi di qualsiasi tipo (numerico, logico, concettuale)

NOTAZIONE

A: insieme $a \in A$ (a elemento, A insieme)

Struttura di A ⟶ $A = \{a \mid a \text{ verifica proprietà } p(a)\}$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- unione: $A \cup B$
- intersezione: $A \cap B$
- $A \cup B = \{x, x \in A \text{ OR } x \in B\}$ è sufficiente che sia verificata una sola proprietà
- $A \cap B = \{x, x \in A \text{ e } x \in B\}$ devono essere verificate contemporaneamente le proprietà
- differenza: $A \setminus B = \{x, x \in A \text{ e } x \notin B\}$
- Insieme vuoto $\emptyset$ insieme che non contiene nessun elemento # zero
- Quantificatori logici
  - $\forall$ per ogni Quantificatore universale
  - $\exists$ esiste Quantificatore esistenziale
  - $\nexists$ Non esiste
- $\exists |$ oppure tale che

Disegno limitarsi a considerare solamente gli elementi in comune tra i due insiemi

Universale: indica che la proposizione è riferita ad ogni elemento dell'insieme considerato

Esistenziale: definisce l'esistenza di almeno un elemento

esplicita una caratteristica della prima proprietà attraverso una seconda proprietà

- l'implicazione logica ⟶ $P \to q$

Se p implica q = se vale p allora vale q

P: ipotesi ; q: ciò che segue logicamente

NB

- equivalenza logica ⟷ (se e solo se)

p implica q e q implica p ⟷ $p \leftrightarrow q$

NB

$P \to q$ è falsa se e solo se contemporaneamente p è vera e q è falsa

- Negazione: notazione $\sim, /, NOT$

NB $P \to q$ equivale a $Non\,q \to Non\,p$

DIM PER ASSURDO → Ipotesi, Implicazione, Tesi | Supponiamo che non sia vero q (ipotesi) e dimostriamo che non è vero l'ipotesi

Attenzione: Negazione $\forall \iff \exists$ Negazione — Basta una che non verifica

Negazione $\exists \iff \forall$ vale la negazione — devo dimostrare che tutte non la verificano

INSIEMI NUMERICI $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ numeri relativi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ Numeri razionali

• relazione di equivalenza ($\sim$)

• $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \iff ab' = a'b$ relazione di equivalenza

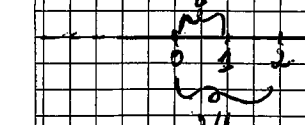
$b \neq 0, b' \neq 0$ → il denominatore non può mai essere uguale a zero

$\mathbb{R}$ {numeri reali}

• Proprietà

① Data una retta r, se fissiamo O = origine e U = unità di misura allora i punti sulla retta sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali

{numeri reali} {punti sulle rette}



i numeri reali corrispondono a lunghezze di segmenti una volta fissata un'unità di misura

② Continuità (Assioma di completezza) → caratteristica che a $\mathbb{Q}$ permette di distinguere i numeri razionali dai numeri reali.

Ogni numero reale posso rappresentarlo come successione di intervalli

→ posso rappresentare ogni numero con approssimazioni sempre più precise

Sia x difetto che x eccesso

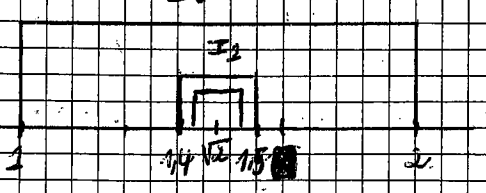
$\sqrt{2}$ intervalli sono le approssimazioni x difetto e x eccesso NB $\sqrt{2}$ non è 1,414 ma un numero compreso tra 1,41 e 1,42

$I_0 = [1, 2]$

$I_1 = [1,4; 1,5]$

$I_2 = [1,41; 1,42]$

$I_3 = [1,414, 1,415]$



Successione di intervalli che all'infinito mi dà $\sqrt{2}$.

aumentando sempre di + la precisione da una parte ottengo dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 (approssimazione x per difetto)

dall'altra quelli in cui quadrante è maggiore di 2 (opposto x stesso)

$i^2 = -1$ i^a per trovare il valore di valore di i^a cerco il resto di a rispetto alla divisione per 4

Sottoinsieme $B \subseteq A$

B è un sottoinsieme di A = B è un insieme i cui elementi appartengono anche ad A

Sottoinsieme proprio $B \subset A$ B è un sottoinsieme proprio di A = B è un insieme i cui elementi $\in$ ad A ma effettivamente diverso da A (A contiene elementi che non $\in$ a B) B contiene solo una parte degli elementi di A

B Sottoinsieme di A $\iff \forall x \in B : x \in A$
$B \subseteq A$

Sottoinsieme improprio Sottoinsieme proprio di A qualunque insieme B costituito da elementi di A tale che ogni elemento $\in$ ad A $\in$ anche a B

un insieme A è sempre sottoinsieme improprio di se stesso

INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C} \{ x+iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

$\in \exists z = x+iy$ $x = Re(z)$, $y = Im(y)$ i: unità immaginaria

In $\mathbb{C}$ $\exists$ operazioni $+, \cdot$

se ho $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ allora $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$(\mathbb{C}; +, \cdot)$ è un campo (insieme in cui valgono le proprietà della somma + e il prodotto $\cdot$)

Valgono

Proprietà della somma
- proprietà associativa $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- proprietà commutativa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- proprietà che $\exists$ elemento neutro 0 $0 = 0 + i0$ $\forall z$ $z + 0 = z$
- esiste l'opposto $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exists -z$ t.c. $z + (-z) = 0$

Non esiste la sottrazione si somma l'opposto

Proprietà della moltiplicazione
- proprietà associativa $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- proprietà commutativa $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- $\exists$ elemento neutro 1 $1 = 1 + i0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $z \cdot 1 = z$
- $\exists$ reciproco $\forall z \neq 0 \exists z^{-1} = \frac{1}{z}$ t.c. $z \cdot z^{-1} = 1$ $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$
- proprietà distributiva $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

NB $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $x \longleftrightarrow x + i0$

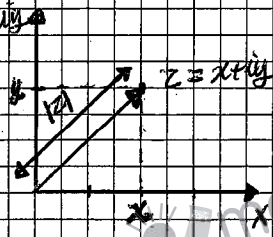
$\mathbb{R} = \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0 \}$ i numeri reali possono essere rappresentati come il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $x + i0$

Rappresentazione dei numeri complessi

Piano di Gauss → l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è il piano di Gauss

possiamo identificare i numeri complessi con l'insieme dei vettori aventi come punto di partenza l'origine e come punto finale il punto di coordinate

$z = x + iy$



Asse $X = \mathbb{R}$

Asse iy = immaginari Puri

Osservazione in $\mathbb{R}$ ∃ relazione d'ordine $\leq$

in $\mathbb{C}$ Non ∃ rel d'ordine

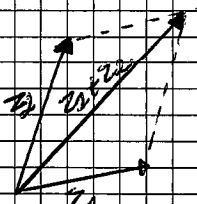
In un campo ordinato tutti i quadrati devono essere maggiori e uguali a 0 mentre in $\mathbb{C}$ vale $i^2 = -1$

Modulo (o Norma)

$z = x + iy \longrightarrow$ Modulo di z $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|z|$ Proprietà

- $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ cioè $|z| \in \mathbb{R}$ & $|z| \geq 0$ le lunghezze sono sempre numeri reali positivi
- $|z| = 0 \longleftrightarrow z = 0 + i0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ disuguaglianza triangolare (un lato del triangolo è sempre $\leq$ della somma degli altri 2)



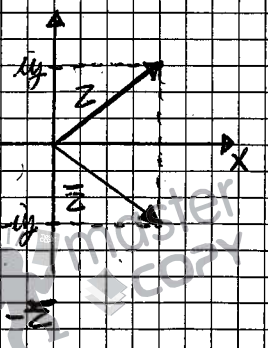


- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(rappresenta la distanza da 0)

osservazione: se $z = x + i0$ cioè $z = x \in \mathbb{R} \longrightarrow |z| = \sqrt{x^2} = |x|$ valore assoluto di x

- Coniugato $\quad z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$



osservazione $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

l'operazione di coniugio permette di sapere se un numero è reale

oss: $z \in \mathbb{C}$ è un numero reale $z = \bar{z}$

$z \in \mathbb{C}$ è puramente immaginario $\longleftrightarrow z = -\bar{z}$

Proprietà del Coniugio

- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ se $w \neq 0$

$\mathbb{R}[X] = \{$ Polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ nella incognita $X \}$

$\mathbb{R}[X] \ni P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad a_n \neq 0$ n grado

$a_n \to a_0 \in \mathbb{R}$

DEF: Dato $P(x)$ polinomio, un numero α si dice radice di $P(x)$ se $P(\alpha) = 0$

Teorema di Ruffini

α radice di $P(x) \iff (x-\alpha)$ divide $P(x)$ con grado di $P(x) = n$

$P(x) = (x-\alpha)\, q(x)$ con grado $q(x) = n-1$

Teorema fon dell'algebra lineare

un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse (contate con molteplicità (ogni radice viene contata tante volte quanto è la molteplicità))

A maggior ragione un polinomio a coefficienti reali ha esattamente n radici complesse dunque al massimo n radici reali

Esistenza di radici reali

un polinomio a coeff reali di grado dispari ha sempre almeno 1 radice reale se il grado è pari non può avere nessuna radice reale

NB → fattorizzazione: a fattore comune parziale o totale
un numero divide un altro quando il resto è 0

DEF molteplicità di una radice

α radice di $p(x)$ → la molteplicità di α è un numero m tale che $(x-\alpha)^m$ divide $P(x)$ e $(x-\alpha)^{m+1}$ non divide $P(x)$

proposizione

$P(x) \in \mathbb{R}[x]$ α radice $\iff$ $\bar{\alpha}$ radice

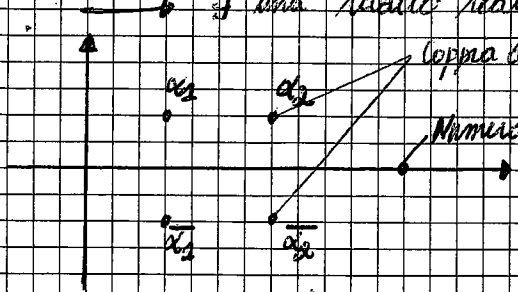
Corollario (conseguenza)

Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado dispari allora $\exists$ una radice reale

~~$P(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado dispari~~

Infatti le radici complesse non reali sono un numero pari perché $\alpha, \bar{\alpha}$ sono sempre coppie di radici ma il T. fond dell'algebra afferma che il numero totale di radici è uguale al grado del polinomio

→ $\exists$ una radice reale



NB le eventuali radici complesse di un polinomio a coefficienti reali si presentano come coppie di complessi coniugati

NB in $\mathbb{R}$ i soli polinomi irriducibili sono quelli di I grado

Mancanza di ordinamento in $\mathbb{C}$

per le regole dei segni ogni quadrato è non negativo in particolare l'unità $1 = 1^2$ è non negativa poiché il suo opposto -1 è non positivo in $\mathbb{C}$ $-1 = i^2$ è un quadrato per cui è non negativo, l'unità elevata non negativo e non positivo è 0: ne viene $-1 = 0$ ciò che è palesemente assurdo → $\mathbb{C}$ non è ordinato