30/09/2021

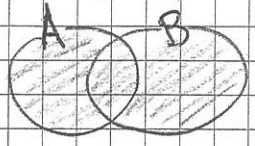
Insiemi e Logica

[Un insieme è una collezione di oggetti]

- simbolo insieme → $\{\ \}$
- insieme vuoto → $\emptyset$
- $a \in A$ → "a" elemento appartiene ad "A" insieme
-  → rappresentazione diagramma di Eulero-Vern

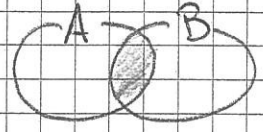
OPERAZIONI TRA INSIEMI

- UNIONE: $A \cup B$ → insieme di elementi che sono o in A o in B



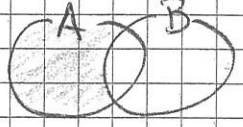
$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$
↳ tale che

- INTERSEZIONE: $A \cap B$ → insieme degli elementi che sono presenti sia in A che in B



$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

- DIFFERENZA: $A \setminus B$ → insieme degli elementi di A che non appartengono a B



$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

SIMBOLI LOGICI

- per ogni → $\forall$
- esiste → $\exists$
- implicazione logica: "se vale una proprietà p allora vale una certa proprietà 'q'" → $p \Rightarrow q$
- equivalenza logica: "se e soltanto se" → $p \Leftrightarrow q$
- negazione logica → $\sim$ oppure /

  es. negare la frase "$p \Rightarrow q$" → "$\sim q \Rightarrow \sim p$"

  nei teoremi per assurdo si usa negare la [illegible] per negare l'ipotesi.

IMPORTANTE: se si vuole negare $\forall$ si afferma che esiste la negazione

negare $\forall$ ⟷ affermare $\exists$ negazione

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ NUMERI NATURALI

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ NUMERI INTERI RELATIVI

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0\right\}$ NUMERI RAZIONALI

$\downarrow$

relazione di equivalenza

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \iff ab' = a'b$

in questo caso vuol dire "equivalente" es. $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \dots \sim \frac{100}{200}$

OPERAZIONI

In $\mathbb{Z}$ $\exists$ operazione $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \to a + b$

1) ASSOCIATIVA: $(a+b)+c = a+(b+c)$ → il risultato non cambia

2) COMMUTATIVA: $a+b = b+a$

3) $\exists$ elemento neutro: 0 = zero, $\forall a \quad a + 0 = a$

4) OPPOSTO: $\forall a \ \exists (-a)$ t.c. $a + (-a) = 0$ (t.c. = tale che)

In $\mathbb{Q}$ $\exists$ operazioni di somma $(+)$ e prodotto $(\cdot)$

verifica da 1 a 4 — verifica da 5 a 8

5) ASSOCIATIVA: $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$

6) COMMUTATIVA: $a \cdot b = b \cdot a$

7) $\exists$ elemento neutro = 1, $\forall a \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

8) RECIPROCO: $\forall a \neq 0 \ \exists a^{-1}$ t.c. $a \cdot a^{-1} = 1$ $\quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

proprietà di collegamento (che collega somma e prodotto)

9) DISTRIBUTIVA: $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Un insieme numerico che verifica 1 - 9 si dice CAMPO

Un insieme che verifica solo le proprietà 1, 3 e 4 si chiama GRUPPO; se però comprende anche la commutativa si chiama GRUPPO COMMUTATIVO

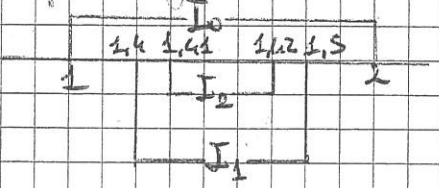
es. $\mathbb{Q}$ è un campo
$\mathbb{N}$ non è un campo → $\nexists$ opposto reciproco

$\mathbb{R}$ = INSIEME DEI NUMERI REALI

Un numero reale è rappresentato da una successione di intervalli incastrati di ampiezza che tende a zero

es. $\sqrt{2}$ (operiamo approssimazioni per difetto ed eccesso)

$I_0 = [1 ; 2]$
$I_1 = [1,4 ; 1,5]$
$I_2 = [1,41 ; 1,42]$
$I_3 = [1,414 ; 1,415]$
⋮



$\pi \in \mathbb{R}$; $e \in \mathbb{R}$; $0 \in \mathbb{R}$; $1 \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ è un campo
- $\mathbb{R}$ eredita le proprietà della somma e del prodotto da $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ma $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ cioè $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
(Contenuto)

ESERCIZIO
Proposizione: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dimostrazione: $\sqrt{2}$ è l'unico numero positivo tale che $(\sqrt{2})^2 = 2$
allora per assurdo supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
quindi posso scrivere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a e b primi fra loro.

$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$ cioè $a^2 = 2 \cdot b^2$

in particolare a^2 è PARI ⇒ anche a è PARI
scrivo $a = 2 \cdot a'$

$2 = (\sqrt{2})^2 = \frac{(2 \cdot a')^2}{b^2} = \frac{4 (a')^2}{b^2}$ cioè $2b^2 = 4 \cdot (a')^2$

$b^2 = 2 (a')^2$

e quindi b^2 è PARI ⇒ anche b è PARI

ASSURDO ∎

il quadratino ∎ si mette quando la dim. è finita

PUNTO FONDAMENTALE: PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ

[Data una retta r, se fissiamo un'origine ed un'unità di misura abbiamo che i punti sulla retta sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali.]

quel dire che fisso 1

quel dire che fisso 0

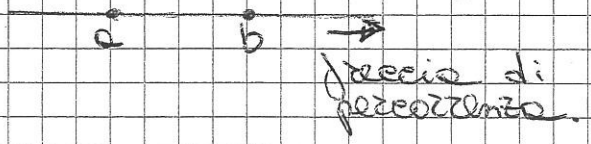
$$\{\text{punti sulla retta}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{numeri reali}\}$$



Relazioni Tra insiemi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: In $\mathbb{R}$ è una relazione D'ORDINE (TOTALE)

$a \leq b$



equazioni

5/10/2021

- In $\mathbb{Z}$ ∃ soluzione dell'equazione $3x+21=0$ → $x=-7$
- In $\mathbb{Z}$ ∄ soluzione dell'equazione $3x+22=0$ → $x=-\frac{22}{3}$ ma ha soluzione in $\mathbb{Q}$
- In $\mathbb{Q}$ ∄ soluzione dell'equazione $x^2-2=0$ → $x=\pm\sqrt{2}$ ma ha soluzione in $\mathbb{R}$

Dato $a \in \mathbb{R}$ $a \geq 0$ ∃ è l'unico numero ≥ 0 tale che $(\sqrt{a})^2 = a$
Se $a<0$ $a \notin \mathbb{R}$ es. $x^2+1=0$ ∄ sol in $\mathbb{R}$

Si introduce un nuovo numero:

$i = \sqrt{-1}$ → UNITÀ IMMAGINARIA

$i = \sqrt{-1}$ UNITÀ IMMAGINARIA

PROPRIETÀ FONDAMENTALE → $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

$i^6 = i^2 = -1$

$i = i^1 = i^5 = i^9$

$1 = i^0 = i^4 = i^8$

$-i = i^3 = i^7$

$i^4 = 1 \Rightarrow i^{4m} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

es. $i^{121} = i^{120+1} = i^{4 \cdot 30 + 1} = i^{120} \cdot i = 1 \cdot i = i$

Se vogliamo risolvere l'equazione

$-x^2+4=0$ sol: $x = \pm\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i2$ $\quad [i2 = 2i]$

$\sqrt{-4} = -i2$

$-x^2+x+1=0$ sol: $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathbb{C}$ → INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{C}$ → INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

$\mathbb{C} \ni z$ → si scrive nella forma

$z = x + iy$ con x e y numeri REALI

$z = x + iy$ con x e y numeri REALI

$x = Re(z)$ PARTE REALE

$x = Re(z)$ PARTE REALE

$y = Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$y = Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

z appartiene a $\mathbb{R}$