ALGEBRA

Programma →
- Numeri Complessi
- Spazi Vettoriali
- Matrici

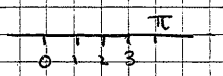
INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = { insieme numeri naturali } = $\{1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = { insieme degli interi relativi } = $\{-2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = { insieme dei numeri razionali } = $\left\{\frac{p}{q} \;/\; p \text{ e } q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\} / \sim \frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$

$\mathbb{R}$ = { insieme numeri reali } $\mathbb{R} \leftrightarrow$ { punti su una retta }



$\mathbb{C}$ = { insieme numeri complessi } $\mathbb{C} \leftrightarrow$ { punti sul piano }



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Legenda

- $A \subset B$ — A è contenuto in B
- $0 \in A$ — l'elemento 0 appartiene all'insieme $A \leftrightarrow \{0\} \in A$
- $A \cup B$ — unione $\leftrightarrow \{x / x \in A$ oppure $x \in B\}$
- $A \cap B$ — intersezione $\leftrightarrow \{x / x \in A$ e $x \in B\}$

IMPLICAZIONE LOGICA

Se [prop. A] allora [prop. B] $\leftrightarrow$ prop A $\Longrightarrow$ prop B

EQUIVALENZA LOGICA

[prop. A] "se soltanto se" [prop. B] $\leftrightarrow$ prop A $\Longleftrightarrow$ prop B

QUANTIFICATORI LOGICI

$\exists$ "esiste"

$\forall$ "per ogni"

/ "negazione" esempio $a \notin B$ $\leftrightarrow$ a non appartiene a B

⚠ **Attenzione**

- negare $\forall \leftrightarrow \exists$ negazione (ne basta 1)
- negare $\exists \leftrightarrow \forall$ è verificata la negazione

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

prop. A $\Longrightarrow$ prop B è equivalente a dire ~~prop B~~ $\Longrightarrow$ ~~prop A~~

ESEMPIO

- $3X - 5 = 0$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}$, MA $X = \frac{5}{3}$ è soluzione in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
- $X^2 - 2 = 0$ non ha soluzione in $\mathbb{Q}$, MA $X = \pm\sqrt{2}$ è soluzione in $\mathbb{R}$

i = unità immaginaria $\rightarrow$ $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1 = i \cdot i$

ESEMPIO

- $X^2 = -1 \longrightarrow$ Soluzioni $\begin{cases} -\sqrt{-1} = -i \\ +\sqrt{-1} = +i \end{cases}$

$\rightarrow$ "i" verifica il fatto che $i^2 = i \cdot i = -1$ ·

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ·

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ · $\rightarrow$ questi numeri si ripetono con ciclicità

$i^5 = i^4 \cdot i = i$ ·

$i^6 = i^5 \cdot i = -1$

$i = i^1 = i^5 = i^9 \ldots$

$1 = i^0 = i^4 = i^8 \ldots$

$-i = i^3 = i^7 = i^{11} \ldots$

$\ldots i^{10} = i^6 = i^2 = -1$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

ESEMPIO

- $i^{307} \rightarrow 307 = \underbrace{304}_{\downarrow i^0} + 3 \qquad i^{307} = i^{304} \cdot i^3 = -i$

- $i^{-4} = \underbrace{i^{-4}}_{\downarrow 1} \cdot i^3 = -i$ ← occhio

$i\,\mathbb{R} = \{\text{numeri immaginari puri}\} = \{(iy) : y \in \mathbb{R}\}$ es. $z = i3$

$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\} = \{x + iy : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ i numeri complessi

ESEMPIO → $-2 + i3 \in \mathbb{C} \qquad 3 = 3 + i0 \in \mathbb{C}$

$$z = x + iy$$ NUMERO COMPLESSO

- x = parte reale di z ↔ $\mathrm{Re}(z)$
- y = parte immaginaria di z ↔ $\mathrm{Im}(z)$

OPERAZIONI con numeri complessi

Somma "+"

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2 \qquad \boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$ ← IMPO

Prodotto "·"

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)}$$ ← IMPO

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un CAMPO

⇓

Valgono tutte le proprietà delle operazioni

SOMMA

- p. Associativa $z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3$
- p. Commutativa $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $\exists$ elemento neutro $0 = 0 + i0$ / $0 + z = z \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $\forall z \ \exists -z$ / $z + (-z) = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

p. Associativa $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

p. Commutativa $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

p. Distributiva es $3 \cdot 10 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5$

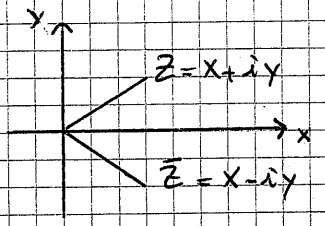
$\exists$ elemento neutro "1" $= 1 + i0$ / $1 \cdot z = z \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \forall z \neq 0, \exists\, z^{-1} / z \cdot z^{-1} = 1$

PRODOTTO

CONIUGIO: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

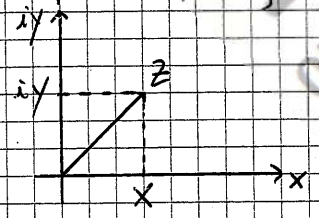
$z \mapsto \overline{z}$ = z coniugato

$z = x + iy$ $\quad \overline{z} = x - iy$ ← numero coniugato



- Proprietà
  - $z + \overline{z} = 2\,Re(z) = 2x$
  - $z - \overline{z} = i2\,Im(z) = i2y$ → OSSERVAZIONE ← IMPORTANTE $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ perché $z = x + i0$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\mathbb{C} \leftrightarrow$ {insieme punti del piano} = PIANO di GAUSS



i numeri reali sono numeri complessi con $Im(z) = 0$

i numeri reali stanno sull'asse x

MODULO

$z = x + iy$ → modulo di z → $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ // la lunghezza del vettore che corrisponde a z ↳ teorema di Pitagora

- Proprietà
  - $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0 \ \forall z$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
  - $|z_1 + z_2| \leq |z| + |z_2|$ eq. disuguaglianza triangolare, il lato del triangolo è sempre ≤ della somma degli altri 2

MASTER COPY Tel. 050 8121 26 Cell. 388 9887745

↳ RECIPROCO

• $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Longrightarrow z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Longrightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

→ $\mathbb{R}[X] = \{$ insieme dei polinomi "p" a coefficienti in $\mathbb{R}$ e variabile $X \}$

↳ $p = p(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

Def Un numero α si dice RADICE del polinomio "p" se $p(\alpha) = 0$
// se α è soluzione del polinomio

↓ TEOREMA di RUFFINI

" α è RADICE di $p \iff (X-\alpha)$ divide p, cioè $\exists$ un polinomio q t.c. $p = (X-\alpha) \cdot q$ "

Def Molteplicità di una radice: " si dice che α ha molteplicità m se $(X-\alpha)^m$ divide p e $(X-\alpha)^{m-1}$ NON divide p

ESEMPIO

$p = p(x) = X^6 + 2X^5 + X^4 = X^4(X^2 + 2X + 1) = X^4(X+1)^2$

RADICI → 0 ha $m=4$ ← $X^4 = 0 \leftarrow X \cdot X \cdot X \cdot X = 0 \leftarrow X = 0$ 4 volte

→ 1 ha $m=2$ ← $(X+1)^2 = (X+1)(X+1) = 0 \leftarrow X-1$ 2 volte

N.B. In $\mathbb{R}[X]$ non sempre $\exists$ radice $\in \mathbb{R}$

→ CONSIDERO $\mathbb{C}[z] = \{$ polinomi a coefficiente in $\mathbb{C}$ e variabile $z \}$

↓ ↓

~ TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA ~

" Se $p \in \mathbb{C}[z]$ di grado $= n \xrightarrow[\text{allora}]{} p$ ha esattamente n RADICI "

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745