INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme degli interi relativi

In $\mathbb{Z}$ esiste un'operazione + (ogni numero ha il suo opposto)

ogni z in $\mathbb{Z}$ ha l'opposto $-z \Rightarrow z + (-z) = 0$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; \begin{matrix} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \end{matrix} \; \begin{matrix} b \neq 0 \\ \wedge \end{matrix} \right\}$ (relazione di equivalenza) $\rightarrow$ numeri razionali

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ se $a \cdot b' = a' \cdot b$

$\mathbb{R} = \{$ numeri REALI $\}$ $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

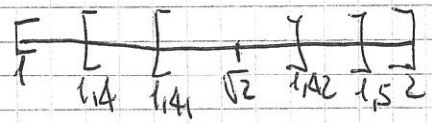
$\mathbb{R}$ è un completamento di $\mathbb{Q}$

$\begin{cases} \pi \in \mathbb{R} \text{ ma } \pi \notin \mathbb{Q} \\ e \in \mathbb{R} \text{ ma } e \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Ogni numero reale corrisponde a una successione di intervalli inscatolati. $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$

ex. $\sqrt{2}$ $[a_0, b_0] = [1, 2]$

$[a_1, b_1] = [1{,}4 ; 1{,}5]$ $[a_2, b_2] = [1{,}41 ; 1{,}42]$



Data una retta e fissato un punto O (origine) e fissata un'unità di misura u

$0_{zero} \longleftrightarrow 0_{origine}$ $\mathbb{R} \longleftrightarrow$ punti sulla retta

$u \longleftrightarrow 1$

$\subset \rightarrow$ è contenuto

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ esiste una relazione d'ordine $\leq \Rightarrow 4 \leq 7$ VERA

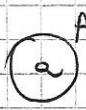
$3x \leq 21 \Rightarrow x \leq \frac{21}{3_1} \Rightarrow x \leq 7$

0 4 7

$7 \leq 7$ VERA $\forall m \in \mathbb{R}$ la relazione d'ordine equivale a

$-5 \leq 4$ VERA segue una freccia

Insiemi $\longleftrightarrow$ collezioni di oggetti

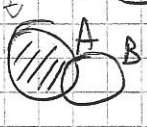
$a \in A$ 

Relazioni fra insiemi:

UNIONE $\triangleright A \cup B$ (o)  $x \in A$ o $x \in B$

INTERSEZIONE $\triangleright A \cap B$ (e)  $x \in A$ e $x \in B$

DIFFERENZA $\triangleright A \setminus B$

INSIEME VUOTO $\triangleright \emptyset$  $x \in A$ e $x \notin B$

Due insiemi si dicono uguali se hanno gli stessi elementi.

QUANTIFICATORI LOGICI

$\forall$ per ogni

$\exists$ esiste

IMPLICAZIONE LOGICA

$p \Longrightarrow q$ { "p implica q" / Se vale p allora vale q

EQUIVALENZA LOGICA

$p \Longleftrightarrow q$ { p è equivalente a q / vale p se e soltanto se vale q

NEGAZIONE LOGICA

$\not p$ oppure $\neg p$ oppure NOT p

IMPORTANTE = Negare $\forall x$ vale $p \Longleftrightarrow \exists x$ per cui vale NOT p

Ogni volta che esco di casa piove) è esistito 1 giorno in cui sono uscito di casa e non ha piovuto

Bob Trovarne Uno

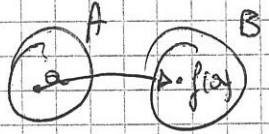
- negare $\exists x$ per cui $\Longleftrightarrow$ $\forall x$ vale NOT p
  vale p

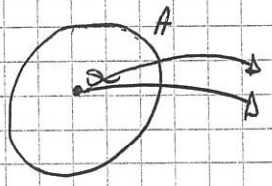
ex.
Se x è multiplo di 4 allora x è un numero pari
$\forall x$ pari allora x è multiplo di 4 $\not\Rightarrow$
$\exists$ un x pari che non è multiplo di 4

<u>dimostrazione per assurdo</u>
p $\Longrightarrow$ q è equivalente a NOT q $\Longrightarrow$ NOT p

FUNZIONE TRA INSIEMI è il dato di
$f: A \to B$
$a \longmapsto f(a)$
1) A = dominio (insieme di partenza)
2) B = codominio (insieme di arrivo)

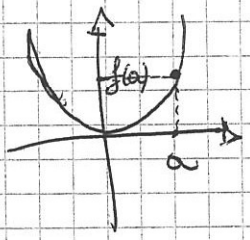
Una relazione Fra A e B che associa ad ogni $a \in A$ un unico $f(a) \in B$

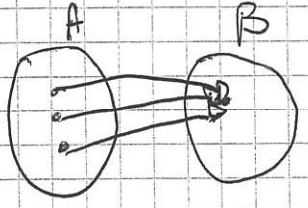




non è una funzione

ex.
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^2$ è funzione





è funzione se sono tutti nello stesso punto

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{x}$ = unico numero reale positivo (≥ 0) tale che
$(\sqrt{x})^2 = x$

$\sqrt{4} = 2$ l'equazione $x^2 = 4$ ha 2 soluzioni $x_1 = \sqrt{4} = 2$
$x_2 = -\sqrt{4} = -2$

$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$ è una funzione

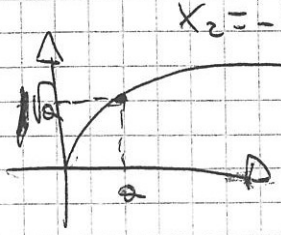


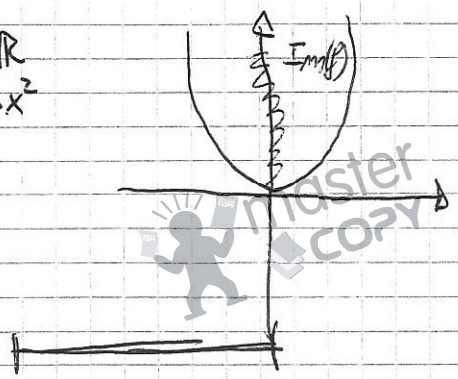
IMMAGINE DI F.

$Im(f) = \{b \in B : \exists a \in A / b = f(a)\}$ $\quad Im(f) \subseteq B$

È il sottinsieme di B degli elementi raggiunti da una freccia.

Ex. 1)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$

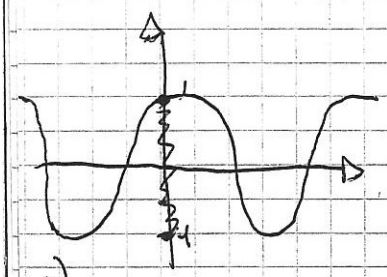


$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x / x^2 = y\}$

$= \{y : y \geq 0\}$

2)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \cos x$ $\quad Im(f) = \{y : \exists x / \cos x = y\} = [-1; 1]$



3)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 2x$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

4)

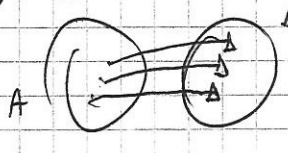
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \to 2x$ $\quad Im(f) = \{\text{numeri pari}\}$

funzione suriettiva (o surgettiva)

$f: A \to B$ si dice suriettiva se $a \to f(a)$ $\forall b \in B$ $\exists a \in A /$ $f(a) = b$

f suriettiva se e soltanto se $Im(f) = B$

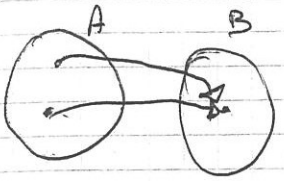
non è suriettiva



funzione iniettiva

$f: A \to B$ si dice iniettiva se $a \longrightarrow f(a)$ $a_1 \neq a_2$ implica $f(a_1) \neq f(a_2)$

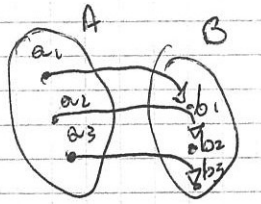
$f(a_1) = f(a_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2$ (equivalente)



funzione biiettiva

$f: A \to B$ se f iniettiva e suriettiva

f biiettiva implica che esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B



cardinalità di un insieme A = numero di elementi di A

↳ #

$f: A \to B$ iniettiva allora la $\#A \leq \#B$

$f: A \to B$ suriettiva allora $\#A \geq \#B$

$f: A \to B$ biiettiva allora $\#A = \#B$

ESERCIZI

1) $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4,5\}$

quante sono le funzioni iniettive $f: A \to B$. 12

2) $A\{1,2,3,4,5\}$

quante sono le funzioni biiettive $f: A \to A$