Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 12/6/2013

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

CORSO DI LAUREA: INGEGNERIA

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. Allora $z^3 =$ [ ]

- Sia $z = 1 - \sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ [ ]

- Dati W, Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}, \ Z = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 + x_3 = 0\},$$

determinare una base di $W \cap Z$: [ ]

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ [ ]

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ se $t =$ [ ]

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si consideri l'autovalore $\lambda_0 = 1$. Allora: $m.a.(1) =$ [ ] ; $m.g.(1) =$ [ ]

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} =$ [ ]

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = -|z| \cdot \overline{z}^2 \\ |z - i| > |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & t & -t \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Determinare, se esitono, i valori di t per cui $Ker(\mathcal{L}_{A_t}) \subset Im(\mathcal{L}_{A_t})$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad Ker(f) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Determinare gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

12-6-2013

* $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\theta}$

$\rho = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\theta = \nearrow \cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \searrow$, $\searrow \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$, $\frac{\pi}{3}$

$z^3 = (4)^3 \cdot e^{i3\pi/3} = 64 \cdot e^{i\pi} = -64$

*

$z = 1 - \sqrt{3}\,i \rightarrow z = \rho \cdot e^{i\theta}$

$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \nearrow \cos\theta = \frac{1}{2} \searrow$, $\searrow \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \nearrow$, $\frac{5}{3}\pi$

$z = 2 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi}$

*

$x_2 = s$

$x_3 = t$

Base $z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda_1 \\ x_3 = \lambda_2 \end{matrix}$

$x_1 - 2x_2 - 2x_3 = +2\lambda_1 - 2\lambda_2 = -2\lambda_2$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\lambda_2$

$x_3 = \lambda_2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Base Wnt

* $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -1(12 - 8) = -4$

* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ diag? Si perché simmetrico.

MASTER COPY
Tel. 050 831 21 26
Cell. 388 9837745
master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+t \\ 4-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1-t = \lambda_1 \\ 4-8 = -\lambda_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-t = 4 \\ \lambda_1 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} t = -3 \end{cases}$$

*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \qquad (1-\lambda)^4 \qquad m.a = 4$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m.g = 4 - 2 = 2$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{+d}{\det} & \frac{-b}{\det} \\ \frac{-c}{\det} & \frac{+a}{\det} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

$\det = 3 - 1 = 2$

Ex 1

$$\begin{cases} z^2 = -|z| \cdot \bar{z}^2 \\ |z-i| > |z| \end{cases}$$

i)

$$\rho^2 \cdot e^{i2\theta} = z^2$$
$$-1 = e^{i\pi}$$
$$|z| = \rho$$
$$\bar{z}^2 = \rho^2 \cdot e^{-i2\theta}$$

$$\rho^2 \cdot e^{i2\theta} = e^{i\pi} \cdot \rho \cdot \rho^2 \cdot e^{-i2\theta}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^3 \\ 2\theta = \pi - 2\theta + 2k\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = 0 \vee 1 \qquad \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = 1\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = 1\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = 1\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\frac{7}{4}\pi\right) = +\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_4 = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

(i) $|z - i| > |z|$

$|x + iy - i| > |x + iy|$

$|x + i(y-1)| > |x + iy|$

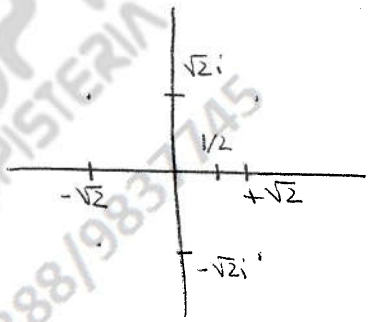
$\sqrt{(x+(y-1))^2} > \sqrt{(x+iy)^2}$

$x^2 + (y-1)^2 > x^2 + y^2$

$y^2 + 1 - 2y > y^2$

$-2y > -1$

$y < \frac{1}{2}$



Sol = $0, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}$

Ex 2.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & t & -t \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det = 3t - 4 - t^2 + t = -t^2 + 4t - 4 =$

$= t^2 - 4t + 4$

$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$