MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

NUMERI COMPLESSI

Permettono di risolvere tutte le equazioni algebriche

$x^2+1=0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$ non c'è un numero reale che elevato al quadrato dà un numero negativo

hanno quindi introdotto il NUMERO i (UNITÀ IMMAGINARIA)

UNITÀ IMMAGINARIA

$$i^2=-1 \qquad i=\pm\sqrt{-1}$$

I numeri complessi sono un'estensione dei reali

$$i=i^1 \quad -i=i^3 \quad 1=i^0 \quad -1=i^2$$

$\Rightarrow i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$

Ogni esponente se aggiungo 4 il risultato è sempre il solito

$i^{10}=i^8=i^2=-1$ ($i=i^1=i^5=i^9$; $1=i^0=i^4=i^8$; $-i=i^3=i^7=i^{11}$)

numeri complessi: $\mathbb{C}=\{x+iy \;:\; x,y\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$

{numeri immaginari puri} $=i\cdot\mathbb{R}=\{iy : y\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}=\{\text{numeri complessi}\}=\{x+iy : x\in\mathbb{R}\ y\in\mathbb{R}\}$ $\quad z=x+iy \quad z\in\mathbb{C}$ $\quad Re(z)=x \quad Re(z)=x$ $\quad Im(z)=y \quad Im(z)=y$

OPERAZIONI PROPRIETÀ

OPERAZIONI in $\mathbb{C}$ e PROPRIETÀ RISPETTIVE $+,\cdot$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ CAMPO

$\begin{cases} z_1=x_1+iy_1 \\ z_2=x_2+iy_2 \end{cases}$

→ SOMMA $\quad z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

* ASSOCIATIVA $\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$
* COMMUTATIVA $\quad z_1+z_2=z_2+z_1$
* 0 elemento NEUTRO $\quad 0=0+i0$ t.c $0+z=z$
* OPPOSTO → $\forall z\ \exists -z$ t.c $z+(-z)=0$

→ PRODOTTO $\quad z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

* ASSOCIATIVA $\quad (z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$
* COMMUTATIVA $\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$
* 1 elemento NEUTRO $\quad 1=1+i0$ t.c $1\cdot z=z\ \forall z$
* RECIPROCO $\quad \forall z\neq 0\ \exists \frac{1}{z}$ t.c $z\cdot\frac{1}{z}=1$

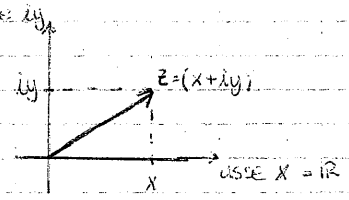
$$z^{-1}=\frac{\bar z}{|z|^2}$$

* DISTRIBUTIVA $\quad z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

PIANO di GAUSS ← $\mathbb{R}=\{\text{punti sulla retta}\}$ $\quad \mathbb{C}=\{\text{punti del piano}\}$

l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è il PIANO di GAUSS

I numeri complessi hanno sia una struttura algebrica e una geometrica, che è sul piano di Gauss



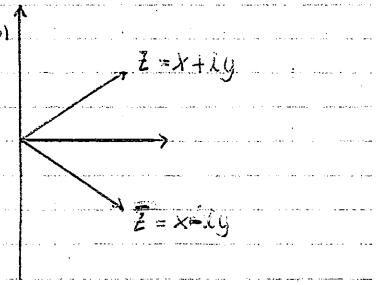
Se si identifica l'asse delle ascisse con $\mathbb{R}$ in modo che $(0,0)=0$ $(1,0)=1$ e si introduce l'unità immaginaria i, per indicare il vettore $(0,1)$ si ha $i^2=i\cdot i=-1$

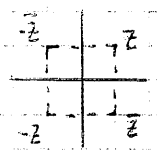
~ CONIUGIO ~

→ CONIUGATO $(\bar z)$ $\quad z=x+iy \quad \bar z=x-iy$ $\quad \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $\quad z\mapsto\bar z$ (è coniugato)

$\bar z$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale x

Il simmetrico di z rispetto all'asse immaginario è $-\bar z$ ed il simmetrico di z rispetto all'origine è $-z$





il CONIUGATO cambia segno alla parte immaginaria di z.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

* $\overline{\overline{z}} = z$ $\quad z = x+iy \quad \overline{z} = x-iy \quad \overline{\overline{z}} = x+iy$
* $z+\overline{z} = x+iy+x-iy = 2x = 2\,Re(z)$
* $z-\overline{z} = x+iy-x+iy = 2iy = 2\,Im(z)$
* $\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z}_1+\overline{z}_2$
* $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

OSSERVAZIONE $\overline{z} \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ cioè $z = x+iy$ se è soltanto se — se appartiene ad $\mathbb{R}$ non c'è la parte immaginaria

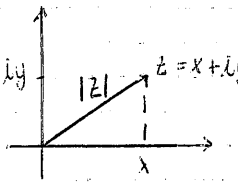
→ MODULO di $z = x+iy \in \mathbb{C}$ è il numero reale (non negativo)

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad |z|^2 = x^2+y^2$$

Nel piano di Gauss $|z|$ è la distanza di z dall'origine e coincide con il modulo in $\mathbb{R}$.

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$$

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ (OSSERVAZIONE) dimostrazione



OSSERVAZIONE $\quad i^2 = -1$

$z = x+iy \Rightarrow \overline{z} = x-iy$

$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - \underbrace{i^2}_{-1} y^2$

$z \cdot \overline{z} = x^2+y^2 = |z|^2$ $\quad +y^2$

$|z|$ rappresenta la lunghezza del vettore (origine - z). Se $|z|=0$ il vettore è concentrato nell'origine.

* $|z| \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0 \quad \forall z$
* $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ disuguaglianza triangolare somma 1 lato ≤ somma 2 lati
* $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
* $|\overline{z}| = |z|$
* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad w \neq 0$

$\frac{1}{z} \neq z^{-1}$

Come determinare il reciproco $\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow z = \frac{|z|^2}{\overline{z}}$

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Un POLINOMIO a coefficienti reali o complessi in x è un'espressione

$\mathbb{R}[x] = \{$ polinomi di coefficienti in $\mathbb{R}$ nella variabile $x\}$

Un polinomio $p = p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$a_n x^n \dots$ coefficienti del polinomio

$n \in \mathbb{N}$ grado del polinomio

$a_n = 1$ polinomio MONICO

Un polinomio di 2° grado ha 2 soluzioni complesse che sono una il coniugato dell'altra

L'insieme dei polinomi in x su $\mathbb{C}$ è indicato con $\mathbb{C}[x]$

DEFINIZIONE Un numero α si dice RADICE del polinomio p quando $p(\alpha)=0$

Un polinomio di grado n avrà n soluzioni, quelle immaginarie saranno una il coniugato dell'altra.

TEOREMA di RUFFINI. Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora α è RADICE di $p(x) \iff$ il polinomio $p(x)$ è DIVISIBILE per $(x-\alpha)$

$\exists$ un polinomio q t.c $p = (x-\alpha)\,q$

Se una radice è comune a k volte nella scomposizione del polinomio diciamo che ha MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA k

DEFINIZIONE MOLTEPLICITÀ di una RADICE α è una radice di $p(x)$ e ha molteplicità m se $(x-\alpha)^m$ divide p e $(x-\alpha)^{m+1}$ non divide p

In $\mathbb{R}[x]$ non sempre esistono radici $\in \mathbb{R}$

TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado $n \geq 1$, ha sempre n radici in $\mathbb{C}$, contate con molteplicità

Un polinomio a coefficienti reali non è detto che abbia sempre radici reali, ma chiaramente se è è una radice lo è anche $\overline{z}$.

Mentre nei numeri complessi tutti i polinomi hanno radici.

TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA

→ PROPOSIZIONE Se $p \in \mathbb{R}[x]$ allora $\alpha \in \mathbb{C}$ e α è radice $\Leftrightarrow$ $\bar{\alpha}$ è radice

→ DIMOSTRAZIONE

$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + __ + a_0$ con $a_n, _ a_0 \in \mathbb{R}$

α radice $\Rightarrow$ $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + _ + a_0 = 0$

consideriamo $\overline{p(\alpha)} = \bar{0}$.

Ma $\bar{0} = 0$

$\overline{p(\alpha)} = \overline{(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + _ a_0)} \Rightarrow \overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + _ + \overline{a_0}$ ← + (per proprietà coniugio)

$\Rightarrow \overline{a_n}\ \overline{\alpha^n} + _ + \overline{a_0}$ ← 0

$a_n, _ a_0 \in \mathbb{R}$ cioè $a_n = \overline{a_n}, _, a_0 = \overline{a_0}$

quindi $\overline{p(\alpha)} = 0 \Rightarrow p(\bar{\alpha}) = a_n \cdot \bar{\alpha}^n + _ + a_0 = p(\bar{\alpha})$

ovvero $\bar{\alpha}$ è radice □

come COROLLARIO Se $p(x)$ è un polinomio $\in \mathbb{R}[x]$ a coefficienti reali di grado dispari allora $p(x)$ ha almeno una radice reale.

Tutti i polinomi di grado maggiore di due sono riducibili sui reali, possiamo ridurci sempre al caso di grado pari. (se è di grado dispari abbiamo visto che ha almeno una radice reale α e quindi basta dividere per $x-\alpha$) e, in questo caso, le radici reali o complesse appaiono a coppie $\beta, \bar{\beta}$

ESPONENZIALE $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$e^{it} = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$

$t \in i\mathbb{R}$

$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta$ DEFINIZIONE

$e^{i0} = e^0 = 1$

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$

$e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$

$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2) = 0 + i \cdot 1 = i$

$* \quad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

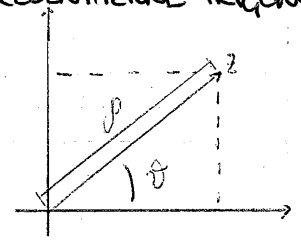
2 applicazioni di e^{it} → RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA quando $t = \vartheta$ (teta)

→ FUNZIONE ESPONENZIALE in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow e^z = e^{x+iy}$ $t = y$

1 RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA di un numero $\mathbb{C}$ → ~~COORDINATE POLARI~~ **COORDINATE POLARI**

RAPPRESENTAZIONE TRIGONOMETRICA

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, rappresentato nel PIANO di GAUSS lo esprimo mediante la coppia (ρ, ϑ)



$\Rightarrow$ ~~modulo~~ di z = lunghezza del vettore

$\Rightarrow$ ~~argomento~~ di z = angolo che z forma con il semiasse x positivo

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$\begin{cases} \rho \in \mathbb{R}^+ \ \rho \geq 0 \\ \vartheta \in \mathbb{R} \text{ (multipli di } 2\pi) \quad [\vartheta] = \text{rad} \end{cases}$

Se $z = x + iy$ $\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

ϑ angolo t.c $\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\rho} \\ \mathrm{sen}\vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$ COS / SEN

$z = \rho \cdot e^{it} = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\vartheta) = \underbrace{\rho\cos\vartheta}_{x} + \underbrace{i\rho\,\mathrm{sen}\vartheta}_{iy}$

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

TEOREMA di De MOIVRE La potenza di un numero complesso si ottiene elevando il modulo all'esponente e moltiplicando l'argomento per l'esponente.

$z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\vartheta_2}$ $\Rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{i\vartheta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$

$z = \rho e^{i\vartheta} \Rightarrow z^n = \rho^n \cdot e^{in\vartheta} \Rightarrow z^n = \rho^n (\cos\vartheta + i\,\text{sen}\vartheta)^n$

$z^{-1} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$ $\quad \bar{z} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$ $\quad z^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i\,\text{sen}(n\vartheta))$

$z^{-1} = \rho^{-1} \cdot e^{-i\vartheta}$

$\bar{z} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

DIMOSTRAZIONE

$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\vartheta)$ $\quad w = r(\cos\eta + i\,\text{sen}\eta)$

$z \cdot w = \rho(\cos\vartheta + i\,\text{sen}\vartheta) \cdot r(\cos\eta + i\,\text{sen}\eta) =$

$= \rho r[(\cos\vartheta\cos\eta - \text{sen}\vartheta\,\text{sen}\eta) + i(\cos\vartheta\,\text{sen}\eta + \cos\eta\,\text{sen}\vartheta)] =$ regola prodotto

$\cos\vartheta\cos\eta - \text{sen}\vartheta\,\text{sen}\eta = \cos(\vartheta+\eta)$

$\cos\vartheta\,\text{sen}\eta + \cos\eta\,\text{sen}\vartheta = \text{sen}(\vartheta+\eta)$

$= \rho r[\cos(\vartheta+\eta) + i\,\text{sen}(\vartheta+\eta)]$

EQUAZIONI

(1) $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \end{cases}$

(2) $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\vartheta_2}$ $\Rightarrow$ $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

(2) è utile per risolvere le RADICI n-SIME

Sia $w \in \mathbb{C}$, vogliamo risolvere l'equazione $z^n = w$ che ha esattamente n radici

- se $w = 0$ allora $z = 0$
- se $w \neq 0$ posto $w = r \cdot e^{it}$ $\quad r = |w|$ = lunghezza vettore, t = argomento w

$z^n = \rho^n e^{int}$ $\quad w = r \cdot e^{it}$ $\quad$ applico il teorema di De Moivre

$z^n = w \iff \rho^n \cdot e^{in\vartheta} = r \cdot e^{it} \iff z^n = w \begin{cases} \rho^n = r & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ n\vartheta = t + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

SOLUZIONI DISTINTE $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} & \rho \to \text{raggio circonferenza} \\ \vartheta = \dfrac{t + 2k\pi}{n} & [0 \le k \le n-1] \end{cases}$

$n \to$ numero lati figura geometrica

le soluzioni sono sulla circonferenza di raggio ρ e formano una figura geometrica che ha tanti lati quanto è l'esponente n.

MASTER COPY Tel. 050 831126 Cell. 388 9837745
master COPY FOTOCOPISTERIA 050/831126 388/9837745

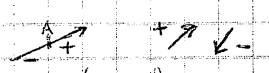
VETTORI

Un VETTORE APPLICATO è un segmento orientato delimitato da due punti che possiede un verso

V_O insieme dei vettori applicati in O $\quad V_O^1$ {vettori su una retta} $\quad V_O^2$ { " del piano} $\quad V_O^3$ { " dello spazio}

$\overrightarrow{OO}$ vettore nullo

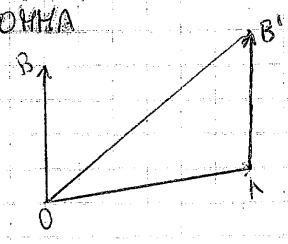
$v = \overrightarrow{AB}$ è caratterizzato da 3 fattori: * direzione * verso * intensità o modulo (lunghezza vettore)



Due VETTORI si dicono EQUIVALENTI quando hanno stessa direzione, verso e intensità, il vettore v_1 equivalente a v lo ottengo dalla traslazione di v.

OPERAZIONI CON I VETTORI

- SOMMA



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OB} \sim AB'$

Per sommare due vettori uso la REGOLA del PARALLELOGRAMMA traslo un vettore sulla punta dell'altro, il vettore risultante parte dalla coda di uno e raggiunge la testa dell'altro. (ogni vettore che sommo lo faccio partire dalla testa dell'altro)

- MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

λ SCALARE (numero reale)
$\vec{v}$ VETTORE

$\lambda \cdot v =$ VETTORE
- stessa direzione
- stesso verso $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ verso opposto
- intensità diversa

$a = \lambda \cdot v \qquad |a| = |\lambda| \cdot |v|$

V SPAZIO VETTORIALE spazio costituito da vettori in $\mathbb{R}$ insieme su cui sono definite le operazioni di somma di vettori e prodotto per scalare.

PROPRIETÀ SOMMA SOMMA $\to$ SOMMA
$\forall v, \forall \to \forall$
$(v, w) \to (v+w)$

- $\to$ ASSOCIATIVA $(v+w)+z = v+(w+z)$
- $\to$ COMMUTATIVA $w+v = v+w$
- $\to$ ELEMENTO NEUTRO $\to$ VETTORE NULLO $v+0 = v$ (concentrato nell'origine)
- $\to$ OPPOSTO $\forall v \in V \ \exists -v \in V$ t.c. $v+(-v) = 0$

PROPRIETÀ PRODOTTO misto
$\mathbb{R} \times V \to V$
$(\lambda, v) \to (\lambda v)$

- $\to$ DISTRIBUTIVA $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
  $v(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
- $\to$ ASSOCIATIVA $\lambda(v w) = (\lambda v)\mu$
- $\to$ ELEMENTO NEUTRO $\forall v \in V \quad 1v = v$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad v + w = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$