# ALGEBRA LINEARE

Marco Fraucosi

LIBRI: → TEORIA Marco Abate - "Algebra lineare"
↘ ESERCIZI Marco Fraucosi - "Esercizi di algebra lineare"




ESERCITAZIONI SETTIMANALI

PROGRAMMA: → NUMERI COMPLESSI
→ SPAZI VETTORIALI
↘ MATRICI

ESAME: PRE APPELLO A NATALE
PROVA SCRITTA + PROVA ORALE

## NUMERI

Che cosa è un numero?

Dai greci all'Ottocento

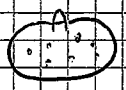
Storicamente i num sono nati x contare → (MA) → Num. neg. ; num. razionali, numeri irrazionali

Peano → Fine 1800 → numeri naturali (def. ne)

Numero → Elemento di un insieme numerico

NOTAZIONI: A INSIEME = collezione di oggetti

INSIEME → Raggruppamento di elementi di qualsiasi tipo (numerico, logico, concettuale)

A = 

$a \in A$ a APPARTIENE AD A

a → Elemento; A → Insieme

Scrittura di A ⇒ $A = \{ a : a \text{ verifica proprietà } p(a) \}$

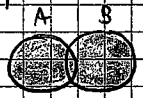
Insieme degli a tali che A verifica una certa proprietà

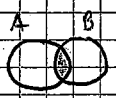
ESEMPIO

$A = \{ x : x \in \mathbb{N}, 12 \leq x \leq 784 \}$

L'insieme A è l'insieme dei numeri naturali compresi tra 12 e 784

## OPERAZIONI TRA INSIEMI

- UNIONE: $A \cup B$ 


- INTERSEZIONE: $A \cap B$ 


$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ o } x \in B \}$ → Non esclusivo → DI UNIONE → Possono essere entrambe

Insieme degli x tali che x appartiene ad A o x appartiene a B → È sufficiente che sia verificata una sola proprietà

$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ e } x \in B \}$

Insieme degli x tali che x appartiene ad A e x appartiene a B → Devono essere verificate entrambe le proprietà

- DIFFERENZA: $A \setminus B =$ 


$A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ e } x \notin B \}$

Bisogna limitarsi a considerare solamente gli elementi in comune tra i due insiemi

Dobbiamo prendere gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi

- INSIEME VUOTO: $\emptyset$ → Insieme che non contiene nessun elemento ≠ zero. Lo zero è un elemento

- QUANTIFICATORI LOGICI: $\forall$ per ogni (quantificatore universale) → Indica che la proposizione è vera se ogni elemento dell'insieme considerato

$\exists$ Esiste (quantificatore esistenziale) $\nexists$ Non esiste

: tale che → Definisce l'esistenza di almeno un

Esclude una condizione della prima parte, altrimenti sarebbe la seconda parte

• IMPLICAZIONE LOGICA : $\Longrightarrow$

N.B.: Se p è vera allora q è vera
se p è falsa, allora q può
fare quello che vuole

$p \Rightarrow q$

Se p implica q = Se vale p allora vale q

p IPOTESI q CIÒ CHE NE SEGUE LOGICAMENTE

• EQUIVALENZA LOGICA : $\Longleftrightarrow$

SE E SOLO SE

$p \Longleftrightarrow q$

p implica q e q implica p

N.B. → la negazione di $p \Rightarrow q$ è "capita che p sia vera e q sia falsa"

($p \Rightarrow q$ è falsa se e solo se contemporaneamente p è vera e q è falsa)

• NEGAZIONE : notazione $\sim$ / NON oppure NOT

IMPORTANTE !!! → se p implica q equivale a non q implica non p

DIM. X ASSURDO $p \Rightarrow q$ equivale a NON q $\Rightarrow$ non p

ESEMPIO: p = n è multiplo di 4
q = n è un numero pari
ALLORA : $p \Rightarrow q$

equivale a
non q $\Rightarrow$ non p
CIOÈ
se n non è un numero pari allora
n non è un multiplo di 4

DIM. X ASSURDO → Ipotesi
Implicazioni
Tesi
↓
Supponiamo che non sia vero q dobbiamo dimostrare che non è vero p

ATTENZIONE !!! : NEGARE $\forall$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ negazione (1)
(→ Ne basta una che non è verificata)

NEGARE $\exists$ $\Longleftrightarrow$ $\forall$ vale la negazione (2)
(→ Devo dimostrare che tutte non la verificano)

ESEMPIO: Ogni volta che piove la Juventus vince
Come posso dimostrare che è falsa? → Devo trovare una partita in cui la Juventus non ha vinto
↳ Almeno una

INSIEMI NUMERICI : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
↓
Contenuto

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ NUMERI NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ NUMERI RELATIVI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \text{ e } b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$ NUMERI RAZIONALI

RELAZIONE DI EQUIVALENZA $(\sim)$

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \iff a \cdot b' = a' \cdot b$ RELAZIONE DI EQUIVALENZA

$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8}$

$b \neq 0 \quad b' \neq 0 \rightarrow$ IL DENOMINATORE NON PUÒ MAI ESSERE UGUALE A ZERO

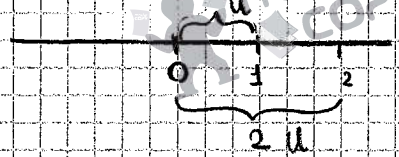
$\mathbb{R} = \{$ numeri reali $\}$

2 PROPRIETÀ

① Data una retta r, se fissiamo O = Origine e U = unità di misura

ALLORA: i punti sulla retta sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali

$\{$ numeri reali $\} \leftrightarrow \{$ punti sulla retta $\}$ → Ad ogni num. reale corrisponde uno ed un solo punto sulla retta




I numeri reali corrispondono a lunghezze di segmenti una volta fissata una unità di misura

② CONTINUITÀ (Assioma di Dedekind / Assioma di completezza) → caratterizza la differenza tra i numeri razionali e i numeri reali

Ogni numero reale posso rappresentarlo come successione di intervalli

↳ Posso rappresentare ogni numero con approssimazioni sempre + precise

↓

i.e. x difetto i.e. x eccesso

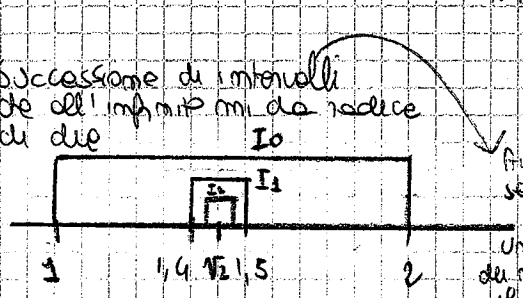
$\sqrt{2}$ : intervalli sono le approssimazioni x difetto e x eccesso

$I_0 = [1; 2]$

$I_1 = [1,4; 1,5]$

$I_2 = [1,41; 1,42]$

$I_3 = [1,414; 1,415]$




N.B. → $\sqrt{2}$ non è 1,414... ma un numero compreso tra 1,41 e 1,42

Aumentando sempre di + la precisione da una parte otteng. dei num. razionali il cui quadrato è minore di 2 (appross. x difetto), dall'altra quelli il cui quadrato è maggiore di 2 (appross. x eccesso)

EQUAZIONI

- $2x + 6 = 0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{N}$
  Ha soluzioni in $\mathbb{Z}$
- $2x - 5 = 0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$
  Ha soluzioni in $\mathbb{Q}$
- $x^2 - 2 = 0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$
  Ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}\ ; -\sqrt{2}$ L'eq. ha 2 soluzioni

$\sqrt{2}$ = UNICO NUMERO REALE POSITIVO CHE ELEVATO ALLA SECONDA DÀ 2

$\sqrt{2}$ è un simbolo → non è un num. razionale per cui non lo posso scrivere come frazione

↓

esiste una successione infinita di approssimazioni

master copy

$\pi$ $e$ Non sono soluzioni di polinomi

- $x^2+1=0$ Non ha soluzioni in $\mathbb{R}$ (le potenze di tutti i numeri sono sempre positive)

$x^2=-1$ Introduciamo l'unità immaginaria $i$.

$$i=\sqrt{-1}$$

$x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$ ; $-\sqrt{-1}$

$\sqrt{-1} = i$ ; $-\sqrt{-1} = -i$

master COPY

$i$ VERIFICA LA CONDIZIONE CHE $i^2=-1$

$i$

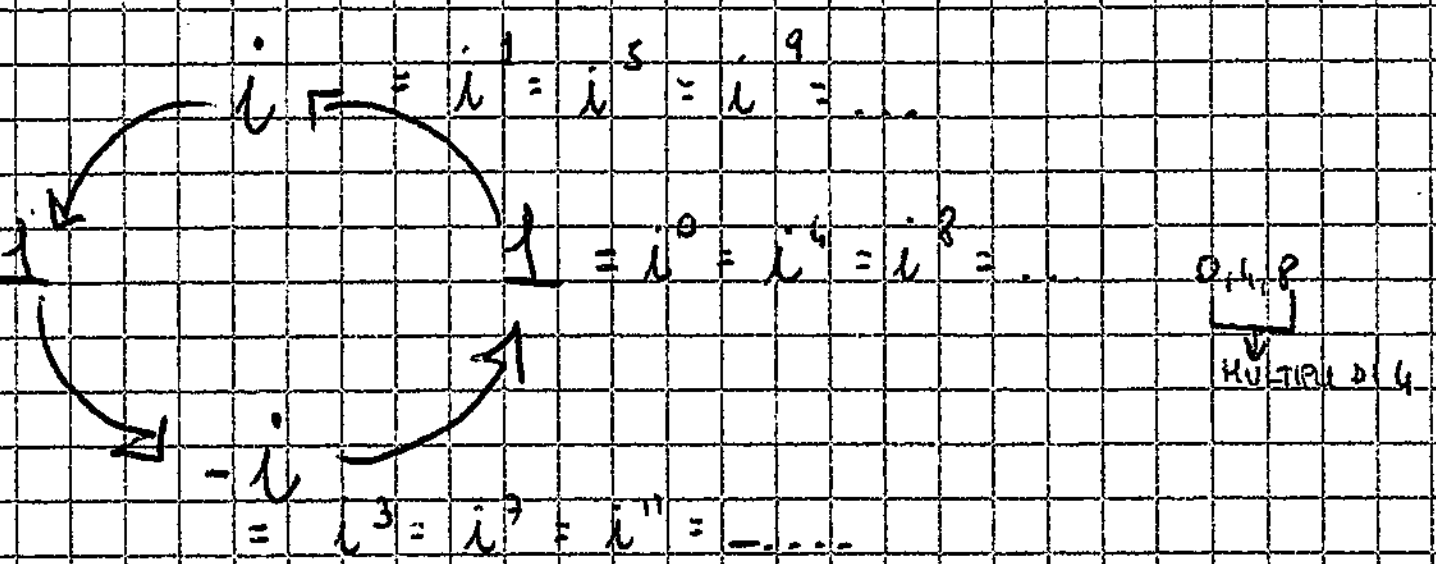
$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=i\cdot 1=i$

$i^6=i^4\cdot i^2=i^2=-1$




$i^{517}=?$

$i^{517}=i$

517 | 4
11 | 129
37
(1) → RESTO 1

Dobbiamo considerare il resto rispetto alla divisione per 4

500 è multiplo di 4
16 è multiplo di 4
500+16 = 516 è multiplo di 4

$i^{517}=i^{516}\cdot i=1\cdot i=i$

SOTTOINSIEME : $B\subseteq A$

B è sottoinsieme di A = B è un insieme i cui elementi appartengono anche ad A

SOTTO INSIEME PROPRIO : $B\subset A$

B è un sottoinsieme proprio di A = B è un insieme i cui elementi appartengono ad A → (A) → Effettivamente diverso da A (A contiene elementi che non appartengono a B)
B contiene solo una parte degli elementi di A

B sottoinsieme di A
$B \subseteq A$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in B : x\in A$

B è un sottoinsieme di A se e solo se per ogni x appartenente a B, risulta che x appartiene all'insieme A

SOTTOINSIEME IMPROPRIO : Si definisce sottoinsieme improprio di A un qualunque sottoinsieme B costituito da elementi di A, tale che ogni elemento appartenente ad A appartiene anche a B

Un insieme A è sempre sottoinsieme improprio di sé stesso

Consideriamo il caso dell'insieme vuoto $\emptyset = A$
L'insieme vuoto è un sottoinsieme improprio di sé stesso: ogni elemento di $\emptyset$, cioè nessun elemento, appartiene ad $A=\emptyset$

# INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI : $\mathbb{C} \{ x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{C} \ni z = x + iy$

$x = Re(z)$ PARTE REALE

$y = Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA

$i$ = UNITÀ IMMAGINARIA $\{ i^2 = -1 \}$

In $\mathbb{C}$ $\exists$ OPERAZIONI $+, \cdot$

ESEMPIO $z_1 = 3 + i5$ $z_2 = -1 + i2$

SOMMA $z_1 + z_2 = (3 + (-1)) + i(5+2) = 2 + i7$

PRODOTTO $z_1 \cdot z_2 = (3 + i5)(-1 + i2) = 3 \cdot (-1) + (i^2 = -1)(5 \cdot 2) + i5 \cdot (-1) + i3 \cdot 2 =$ (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

$= -3 - 10 + i = -13 + i$

In generale, se ho $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, allora $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot y_1) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ È UN CAMPO (insieme in cui valgono le proprietà della somma $+$ e il prodotto $\cdot$)

Proprietà della somma:
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- PROPRIETÀ CHE $\exists$ ELEMENTO NEUTRO $0$ $0 = 0 + i0$ $\forall z \; z + 0 = z$
- ESISTE L'OPPOSTO $\forall z \in \mathbb{C} \; \exists -z$ t.c. $z + (-z) = 0$ (non esiste la sottrazione → si somma l'opposto)

$z = 3 + i4$

$-z = -3 + i(-4)$

Proprietà della moltiplicazione:
- PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- PROPRIETÀ COMMUTATIVA $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- $\exists$ ELEMENTO NEUTRO $1$ $1 = 1 + i0$ $\forall z \in \mathbb{C} \; z \cdot 1 = z$
- ESISTE RECIPROCO: $\forall z \neq 0 \; \exists z^{-1} = \left(\frac{1}{z}\right)$ t.c. $z \cdot z^{-1} = 1$

$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

N.B. → $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

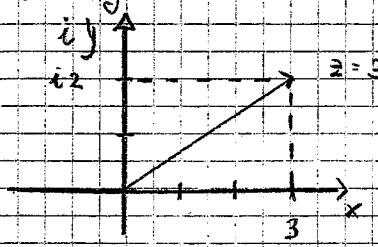
$X \to x + i0$

$\mathbb{R} = \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0 \}$ → i numeri reali possono come rappresentati come il sottoinsieme dei num. complessi della forma $x + i0$

## RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

PIANO DI GAUSS → l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è il piano di Gauss: Possiamo identificare i numeri complessi con l'insieme dei vettori avente come p.to iniziale l'origine e come p.to finale il p.to di coordinate $(Re(z); Im(z))$

$z = x + iy$




ASSE $x = \mathbb{R}$

ASSE $iy$ = immaginari PURI

OSSERVAZIONE: In un caso ordinario tutti i quadrati delle cose esistono maggiori o uguali a 0! Invece in $\mathbb{C}$ vale $i^2 = -1$

In $\mathbb{R}$ $\exists$ RELAZIONE D'ORDINE $\leq$

In $\mathbb{C}$ non $\exists$ REL. D'ORDINE

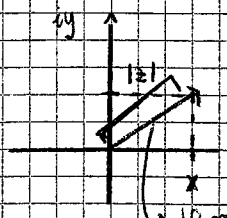
(A)

Possiamo considerare il modulo che corrisponde alla lunghezza del vettore

## MODULO (o norma)

$z = x + iy$ → modulo di $z$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$




↳ il modulo di $z$ rappresenta la lunghezza del vettore che corrisponde a $z$