• Insiemi Numerici

• $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ INSIEME NUMERI NATURALI

• $\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ INSIEME NUMERI INTERI RELATIVI

NB In $\mathbb{Z}$ esiste un operazione $\oplus$: a ogni numero c'è il suo opposto

• proprietà dell'insieme $\mathbb{Z}$: Ogni z in $\mathbb{Z}$ ha l'opposto $-z$ → $\boxed{z + (-z) = 0}$

• $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ con } b \neq 0 \right\} / \sim$ vale la relazione di equivalenza che dice:

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ se $a \cdot b' = a' \cdot b$

• $\mathbb{R} = \{\text{NUMERI REALI}\}$ completamento di $\mathbb{Q}$

es $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \in \mathbb{R}$, ma $\pi \notin \mathbb{Q}$

$e \in \mathbb{R}$, ma $e \notin \mathbb{Q}$

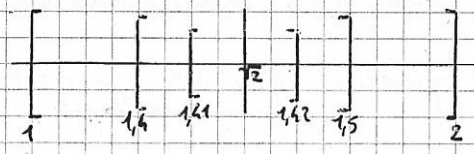
NB. Ogni numero reale corrisponde a una successione di intervalli inscatolati

$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2]$

es $\sqrt{2}$ $I: [a_0; b_0] \to I: [1; 2]$

$[a_1; b_1] \to I: [1{,}4; 1{,}5]$

$[a_2; b_2] \to I: [1{,}41; 1{,}42]$



• PUNTO FONDAMENTALE: "Data una retta e fissato un punto O (origine) e fissata un unità di misura u"

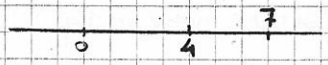
• $O \to 0$ (origine)
• $u \to 1$

$\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Punto sulla retta (postulato di continuità, legato agl'intervalli inscatolati)

• OSS: $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$ NB. In $\mathbb{R}$ esiste una relazione d'ordine $\leq$

es $4 \leq 7$ vera

ES. $3x \leq 21 \to x \leq 7$

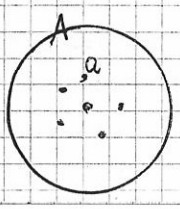


quindi $4 \leq 7$ vera

es. $7 \leq 7$ vera ; $-5 \leq 4$ vera | In $\mathbb{R}$: la relazione d'ordine è uguale a una freccia!



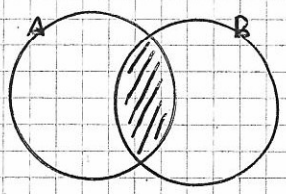
• Insiemi (def.): collezione di oggetti



$a \in A$ A = insieme
a = elemento di A

- RELAZIONI TRA INSIEMI

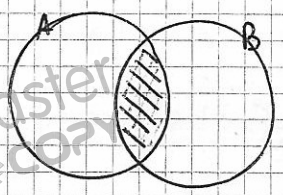
① Unione $A \cup B$



- il simbolo $\cup$ indica un "oppure", "o"

$x \in A \vee x \in B$

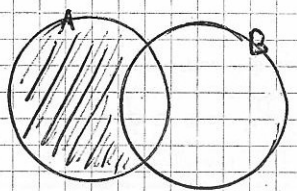
② Intersezione $A \cap B$



- il simbolo $\cap$ indica una "e"

$x \in A \wedge x \in B$

③ Differenza $A \setminus B$



$x \in A$, ma $x \notin B$

④ Insieme vuoto $(\emptyset)$ → un insieme che non ha nessun elemento

- QUANTIFICATORI LOGICI: $\forall$ = "per ogni" | $\exists$ = "esiste"

- IMPLICAZIONE LOGICA: $p \Rightarrow q$, che si legge "p implica q" o "se vale p allora vale q"

- EQUIVALENZA LOGICA: $p \Leftrightarrow q$, che si legge "p è equivalente a q" o "vale p se e soltanto se vale q" (o COIMPLICAZIONE)

- NEGAZIONE LOGICA: (p) è una certa proposizione → $\not p$ oppure $\neg p$ oppure NOT p

IMP. Negare $\forall x$ vale $p \Leftrightarrow \exists x$ per cui vale NOT p
Negare $\exists x$ per cui vale $p \Leftrightarrow \forall x$ vale NOT p

Es. x multiplo di 4 ⇒ x numero pari

"$\forall x$ pari allora x è un multiplo di 4" → la sua negazione è:

"Esiste un x pari che non è multiplo di 4"

- DIMOSTRAZIONE per ASSURDO: Negare la tesi e attraverso processi logici giungo a negare l'ipotesi

p = IPOTESI ; q = TESI

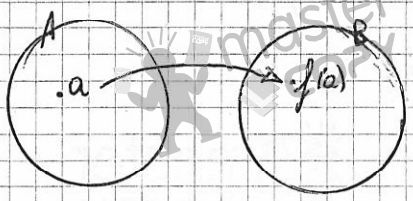
$p \Rightarrow q$ è equivalente a $\text{NOT } q \Rightarrow \text{NOT } p$

FUNZIONE tra INSIEMI

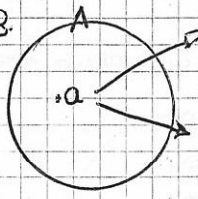
$f: A \to B$ è il dato di: ① A = Dominio (insieme di partenza)
$a \mapsto f(a)$ ② B = Codominio (insieme di arrivo)
③ Una relazione tra A e B che associa ad ogni $a \in A$ un unico $f(a) \in B$

$\forall a \in A \quad \exists! f(a) \in B$ ($a \in A$, $f(a) \in B$)
$f(a) \in B$ è ben definito

• Rappresentazione tramite Eulero Venn

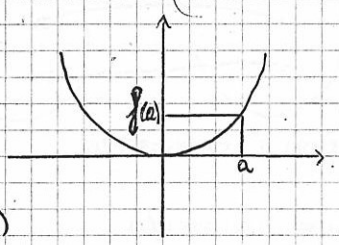


NB.



se da un insieme di partenza A partono più di una freccia da uno stesso punto;
NON è una FUNZIONE

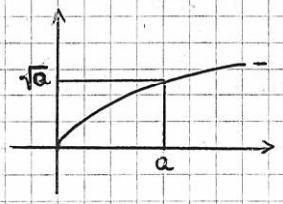
• Esempi: ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ è una funzione



$R^+ : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{x}$ = unico numero reale positivo (≥ 0) tale che $(\sqrt{x})^2 = x$

es. $\sqrt{4} = 2$ NB. l'equazione $x^2 = 4$ ha 2 soluzioni: $x = 2$, $x = -2$

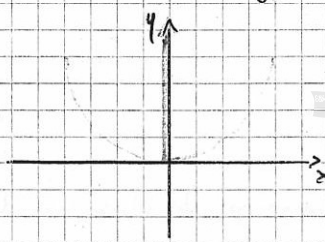
$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \to \sqrt{x}$ è una funzione



• Immagine di f = $Im(f) = \{b \in B : \exists a \in A \mid b = f(a)\}$ $\Rightarrow Im(f) \subseteq B$

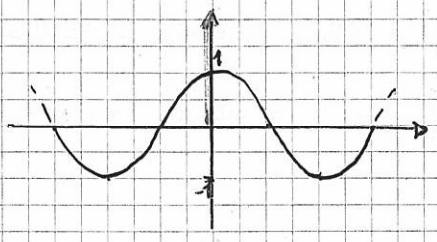
È il sottinsieme di B degli elementi raggiunti da una freccia

es. ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \mid x^2 = y\} = \{y : y \geq 0\}$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \cos(x)$ $\quad Im(f) = \{y : \exists x \mid \cos(x) = y\} = [-1; 1]$



③ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x$ $\quad Im(f) = \mathbb{R}$

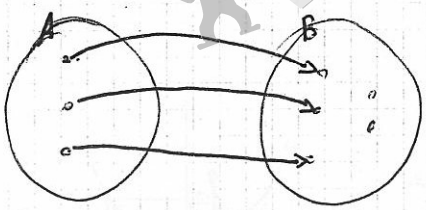
④ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \longmapsto 2x$ $\quad Im(f) = \{\text{numeri pari}\}$

FUNZIONE SURIETTIVA (o SOGGETTIVA)

$f: A \to B$, $a \longmapsto f(a)$

Si dice suriettiva se $\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$

oss. f è suriettiva $\iff Im(f) = B$



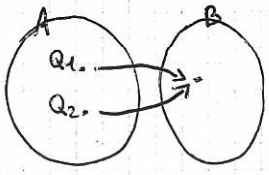
NON È SURIETTIVA

FUNZIONE INIETTIVA

$f: A \to B$, $a \longmapsto f(a)$

Si dice iniettiva se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

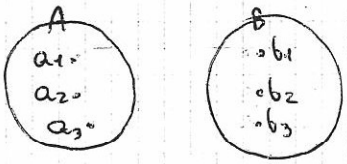
equivalente $f(a_1) = f(a_2)$ se soltanto se $a_1 = a_2$



NON È INIETTIVA

FUNZIONE BIETTIVA (o BIGETTIVA); se f è sia iniettiva e suriettiva (c'è una corrispondenza biunivoca)

f biettiva $\Rightarrow \exists$ corrispondenza biunivoca tra A e B



[Cardinalità] di un insieme A = Numero di elementi di A

↳ simbolo: $\#$

oss ① . $f: A \to B$ è iniettiva $\Rightarrow \#A \leq \#B$

oss ② $f: A \to B$ suriettiva $\Rightarrow \#A \geq \#B$

oss ③ $f: A \to B$ bigettiva $\Rightarrow \#A = \#B$

Esercizi

① $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,4,5\}$ Quante sono le funzioni iniettive $f: A \to B$?

⇒ 15 funzioni. $(3 \cdot 5 = 15)$

② $A=\{1,2,3,4,5\}$ Quante sono le funzioni biiettive $f: A \to A$

NUMERI COMPLESSI

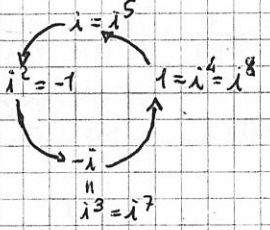
- L'equazione $3x=4$ non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$
- l'equazione $x^2=2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ SOLUZIONE: $x=\pm 2 \in \mathbb{R}$
- l'equazione $x^2=-1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

↳ si introduce il numero $i=\sqrt{-1}$ UNITÀ IMMAGINARIA

- Prop. fondamentale: $i^2=-1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ $\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ $\quad i^9 = i^2 = -1$

$i^{1450} = \underbrace{i^{1448}}_{1} \cdot i^2 = i^2 = -1$



dobbiamo considerare resto rispetto alla divisione per 4.

- $x^2=-1 \to$ SOL: $i=\sqrt{-1}$, $-i=-\sqrt{-1}$ $\quad x^2=-4 \to$ SOL: $x=\pm\sqrt{-4}$

↳ $x = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4} = \pm i2$

- $x^2+x+1=0$ $\quad x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ / $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

[Numero Complesso $z = x + iy$ con $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$]

x → parte reale $x=Re(z)$; y → parte immaginaria $y=Im(z)$

$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\}$ oss. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\quad x \longmapsto x+i\cdot 0$

es. $5+i2 \in \mathbb{C}$ es. $1+i0 \in \mathbb{C}$ es. $-3-2i \in \mathbb{C}$

es. $0 = 0+i0 \in \mathbb{C}$ es. $\pi = \pi+i0 \in \mathbb{C}$

OPERAZIONI

- somma: $z_1 = 5+i2$, $z_2 = 3+i7$ $\Rightarrow z_1+z_2 = (5+3)+i(2+7) = 8+i9$

- prodotto: $z_1 = 5+i2$, $z_2 = 3+i7$ $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (5+i2)(3+i7) = 15+i^2 14+5(i7)+(i2)\cdot 3 = 15-14+i(35+6) = 1+i41$

- $z_1 = x_1+y_1$, $z_2 = x_2+y_2$ $\Rightarrow$ $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

- $z = x+iy \Rightarrow -z = -(x+iy) = -x+i(-y)$ es. $z=3+i4 \Rightarrow -z = -3+i(-4)$ l'opposto

zero $= 0 = 0+i0$ elemento neutro somma