ALGEBRA LINEARE: 28 SETTEMBRE 2011

- MARCO FRANCIOSI.
- LIBRO: GEOMETRIA ANALITICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE (M. ABATE - C. DE FABRITIIS)

PROGRAMMA:
- NUMERI COMPLESSI.
- SPAZI VETTORIALI.
- MATRICI.
- APPLICAZIONI LINEARI.
- PRODOTTI SCALARI.

· INSIEMI DI NUMERI:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$

$\mathbb{Z} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \quad q \neq 0 \quad p; q \in \mathbb{Z} \right\} / \sim$

$\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\}$

$\sim$ = RELAZIONE DI EQUIVALENZA

$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- L'EQUAZIONE $x^2 - 2 = 0$ IN $\mathbb{Q}$ NON HA SOLUZIONE IN $\mathbb{R}$ SI!

$\sqrt{2}$ È UN NUMERO IRRAZIONALE;
DIMOSTRIAMO PER ASSURDO CHE $\sqrt{2}$ SIA UN NUMERO RAZIONALE:

SUPPONIAMO $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ CON p E q PRIMI TRA LORO.

QUINDI $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \longrightarrow p^2 = 2q^2$

IL 2 QUINDI DIVIDE p^2 E p.

ALLORA SCRIVIAMO:

$p = 2p_1$ (PERCHÉ SCRIVO $p = 2p_1$?)

$\sqrt{2} = \frac{2p_1}{q} \longrightarrow 2 = \frac{4p_1^2}{q^2} \longrightarrow q^2 = 2p_1^2$

IL 2 QUINDI DIVIDE q^2 E q.

↓

MA QUESTO È ASSURDO IN QUANTO AVEVAMO DETTO CHE p E q ERANO PRIMI TRA LORO!

• UNITÀ IMMAGINARIA:

• In $\mathbb{R}$ non esiste soluzione all'equazione

$$x^2+1=0$$

in $\mathbb{C}$ (l'insieme dei numeri complessi) sì!

$$i=\sqrt{-1}$$ i è un numero tale che $i^2=-1$!

POTENZE DI i:

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=1$

$i^5=i$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$-1=i^2=i^6=i^{10}=i^{14}$

$-i=i^3=i^7=i^{11}$

$i=i^1=i^5=i^9=i^{13}$

$1=i^0=i^4=i^8=i^{12}$

ESERCIZIO:

• i^{422}

$422=420+2=4(105)+2$

$i^{422}=i^{420}\cdot i^2$

$i^{4\cdot 105}\cdot i^2$

$1\cdot i^2=-1$

• NUMERI IMMAGINARI PURI:

• Molteplichiamo i per un numero reale per esempio $i5$;

l'equazione:

$x^2=-25$

$x=\pm\sqrt{-25}$

$x=\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}$

$x=\pm i5$

· I NUMERI COMPLESSI:

29/settembre/2011

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\mathbb{C}: \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

- se $y = 0$ $\quad z = x \quad z \in \mathbb{R}$
- se $x = 0$ $\quad z = iy \quad z \in i\mathbb{R}$

$x = Re(z)$ PARTE REALE DI z.

$y = Im(z)$ PARTE IMMAGINARIA DI z.

$z = \underbrace{2}_{\text{PARTE REALE}} + \underbrace{i3}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}} \rightarrow$ NUMERO COMPLESSO

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

esempio:

l'equazione: $z^2 + z + 1 = 0$

ha soluzioni:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

· SOMMA e PRODOTTO:

In $\mathbb{C}$ esistono le operazioni di somma e prodotto.

$0 = 0 = 0 + i0$ zero è l'elemento neutro della somma.

$1 = 1 = 1 + i0$ uno è l'elemento neutro del prodotto.

SOMMA:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned}\right\} \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

esempio:

1) $z_1 = 1 + i4$
$z_2 = 2 + i3$
$z_1 + z_2 = (1+2) + i(4+3) = 3 + i7$

2) $z_1 = x_1 + iy_1 \longrightarrow -z_1 = -x_1 - iy_1$
$z_1 + (-z_1) = 0$

PRODOTTO: - PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA. (GSPIA)
- REGOLA CHE $i^2 = -1$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

esempio:

$z_1 \cdot z_2$ $\quad z_1 = 1 + i4$, $z_2 = 2 + i3$

$$(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4) + i(2 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = -10 + i11$$

CAMPO:

$(\mathbb{C}; +; \cdot)$ è un campo.

GRUPPO

SOMMA = vale la PROPRIETÀ: 1) ASSOCIATIVA.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

2) COMMUTATIVA.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

3) $\exists$ elemento NEUTRO lo ZERO.

4) $\forall z$ $\exists$ L'OPPOSTO $(-z)$.

GRUPPO

PRODOTTO = VALE LA PROPRIETÀ: 1) ASSOCIATIVA.

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

2) COMMUTATIVA.

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

3) $\exists$ elemento NEUTRO L'UNO.

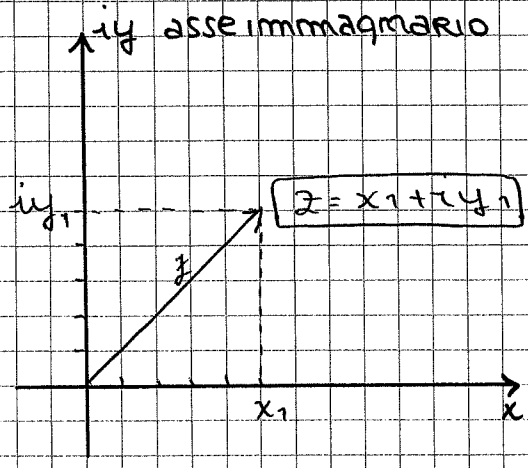
4) $\forall z \in 0$ $\exists$ z^{-1} TALE CHE $z \cdot z^{-1} = 1$

↓

- PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$
- UN INSIEME CHE HA QUESTE DUE PROPRIETÀ LEGATE DALLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA È DETTO CAMPO.
- $\forall n$ $\mathbb{R}$ $\exists$ una RELAZIONE D'ORDINE $\leq$.

  $\forall n$ $\mathbb{C}$ ~~$\exists$~~ una RELAZIONE D'ORDINE $\leq$, cioè non so DIRE RIGUARDO a 2 numeri complessi se uno è più GRANDE dell'altro!

· RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI:



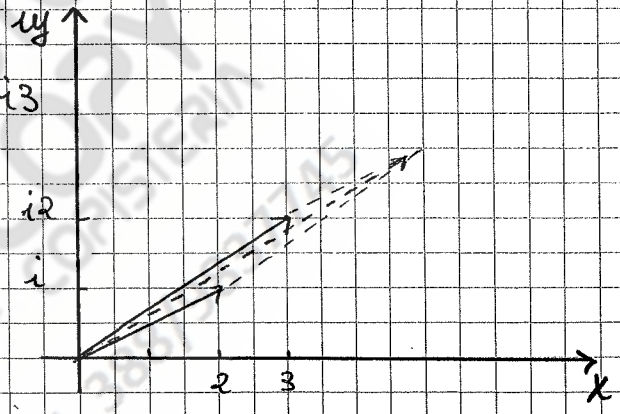
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\mathbb{C} \leftrightarrow$ VETTORI DEL PIANO.

SOMMA: la somma corrisponde alla somma vettoriale si usa la REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA.

esempio:

$z_1 = 3 + i2$
$z_2 = 2 + i$
$\Big\} \; z_1 + z_2 = 5 + i3$



RECIPROCO:

$z = 3 + i2$

$\exists\, z^{-1} = a + ib$ TALE CHE $(3+i2)(a+ib) = 1$
$= 1 + i0$

$$\begin{cases} Re = Re \\ Im = Im \end{cases}$$

$$(3a-2b) + i(2a+3b) = 1 + i0$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ i(2a+3b) = i0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{3}{2}b$$

$$3 \cdot \left(-\frac{3}{2}b\right) - 2b = 1 \rightarrow -\frac{9}{2}b - 2b = 1$$

$$\rightarrow -9b - 4b = 2$$
$$13b = -2$$
$$b = \frac{2}{13} \rightarrow a = \frac{3}{13}$$

$$\Rightarrow \bar{z}^{1} = \frac{3}{13} + i\frac{2}{13}$$