1a lezione

ALGEBRA LINEARE

Professore: FRANCIOSI MARCO
e-mail: franciosi@ing.unipi.it

Libri → Teoria: Abate de Fabritis "Geometria analitica con elementi di algebra lineare" ed Mc Graw-Hill
↳ Esercizi: FRANCIOSI "Es di Algebra"

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Programma

- Numeri complessi
- Spazi Vettoriali
- Matrici
- Prodotto scalare

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{R} = \{$ numeri reali $\}$

Data una retta e fissati origine "0" e unità 1. Allora: l'insieme dei numeri reali lo identifico in una retta

In $\mathbb{Q}$ non posso risolvere l'eq $x^2 - 2 = 0$

In $\mathbb{R}$ $\exists$ 2 soluzioni dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

In $\mathbb{R}$ esistono 2 operazioni $(+, \cdot)$

Somma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Proprietà: ASSOCIATIVA $(a+b)+c = a+(b+c)$

COMMUTATIVA $a+b = b+a$

elemento neutro $= 0$ $0+b = b+0 = b$

PRODOTTO

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

proprietà ASS $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

COMM $a \cdot b = b \cdot a$

elemento neutro $= 1$ tale che $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$

OPPOSTO: $\forall b \; \exists$ (unico) $-b$ tale che $b + (-b) = 0$

RECIPROCO: $\forall b \neq 0 \; \exists$ (unico) b tale che $b(b^{-1}) = 1$

La prop distributiva collega $(+, \cdot) \to a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Un insieme con 2 operazioni $+$ e $\cdot$ che gode di queste prop. si chiama **CAMPO**

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato; esiste una relazione d'ordine $\leq$

$7 \leq 7$ Vera

$7 \leq 3\pi$ Vera

$-e \leq -2$ Vera

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

L'eq $x^2 + 1 = 0$ non ha sol in $\mathbb{R}$

Introduciamo un nuovo numero i

i = unità immaginaria

$i = \sqrt{-1}$ i risolve l'eq $x^2 + 1 = 0$

Vogliamo mantenere le proprietà di $\mathbb{R}$ in particolare

$-i$ è un'altra soluzione dell'eq.

$i^2 = -1$ $i^0 = 1$ Per def.

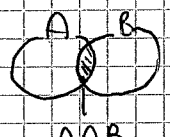
$i^3 = -i$ $i^5 = i$ i^{1212}; i^n

$i^4 = 1$ $i^6 = i^2$ osservazione: se n è multiplo di 4

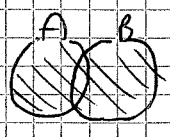
$n = 4r$ allora $i^n = i^{4r} = (i^4)^r = 1$

NOZIONI DI INSIEMISTICA

- $a \in A$ appartiene
- $B \subseteq A$ se $\forall b \in B$ allora $b \in A$
  - ↓ contenuto



Intersezione



Unione

- $\exists$ esiste
- $\forall$ per ogni

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$A = \{\text{numeri pari}\} = \{n \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot p\}$

$B = \{\text{multipli di } 3\} = \{N \in \mathbb{N} : \exists\, n = 3 \cdot q\}$

$A \cap B = \{\text{multipli di } 2 \text{ e } 3\} = \{\text{multipli di } 6\}$

↓ Primi fra loro

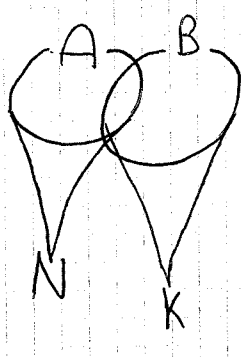
A INSIEME

La cardinalità di A [notazione: #A] è il "numero degli elementi"

- $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ aleph 0
- $\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} > \#\mathbb{N}$
- $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$

PROP:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$



$\#A = N$

$\#B = K$

$\#(A \cap B) = P$

Elementi totali: $N + K - P$

master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

FUNZIONI

$$f: A \longrightarrow B \qquad a \in A \qquad f(a) \in B$$
$$a \longmapsto f(a)$$

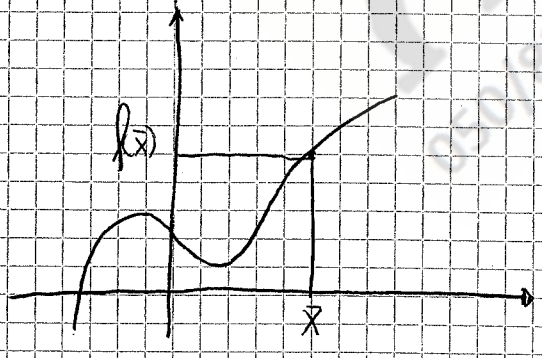
- È una relazione tra A e B tale che $\forall a \in A \; \exists!\, f(a) \in B$

$$\text{GRAFICO} = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

Se $A = B = \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

$$\text{GRAFICO di } f = \{(x,y) : y = f(x)\}$$



CURVA DI eq $y = f(x)$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- Grafico di f è una curva nel piano cartesiano
- Non tutte le curve del piano sono grafico di una funzione