GLI INSIEMI DI NUMERI

INSIEME DEI NUMERI NATURALI → $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$

INSIEME DEI NUMERI INTERI RELATIVI → $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI → $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ q \neq 0,\ p \wedge q \in \mathbb{Z}\right\}$

INSIEME DEI NUMERI REALI → $\mathbb{R} = \{\text{numeri reali}\}$

↓

data una retta fissata origine O e fissata unità di misura ⇒ $\mathbb{R} \leftrightarrow$ {tutti i punti sulla retta}

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

DIMOSTRAZIONE:

IN $\mathbb{N}$ NON ESISTE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$x + 5 = 0 \quad x = -5$ → INTRODUCIAMO $\mathbb{Z}$

IN $\mathbb{Z}$ NON ESISTE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$3x + 8 = 0 \quad x = \frac{8}{3}$ → INTRODUCIAMO $\mathbb{Q}$

IN $\mathbb{Q}$ NON ESISTE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$x^2 - 2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$ → INTRODUCIAMO $\mathbb{R}$

ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO:

$\sqrt{2} \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ p e q primi tra loro

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = q^2$ due divide p^2 quindi anche p

$p = 2p_1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2p_1}{q} \Rightarrow 2 = \frac{4p_1^2}{q^2}$

$\frac{q^2}{2} = p_1^2$ → 2 divide q

↓

ciò è impossibile perché per ipotesi q e p sono primi tra loro e quindi non possono essere entrambi divisibili per 2

IN $\mathbb{R}$ NON ESISTE SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE:

$x^2+1=0 \quad x=\pm\sqrt{-1}$

↓

INTRODUZIONE DELL'UNITÀ IMMAGINARIA $i=\sqrt{-1}$

i è un numero $\mid i^2=-1$

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$

$i^4=i^2\cdot i^2=-1(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=i$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$i=i^1=i^5=i^9$ etc...

$-1=i^2=i^6=i^{10}$ etc...

$1=i^0=i^4=i^8$ etc...

$-i=i^3=i^7=i^{11}$ etc...

ESEMPI:

1) $i^{4122}=(i^4)^{1025}\cdot i^2$ per le proprietà delle potenze

2) $i^{4122}=(1)^{1025}\cdot(-1)=-1$

$i\cdot 5=?$ → $x^2=-25$ ha soluzione $x=\pm\sqrt{-25}$

$x=\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}=\pm i\cdot 5$

Sappiamo che

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ → INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI

se $y = 0 \Rightarrow z = x \in \mathbb{R}$

se $x = 0 \Rightarrow z = iy \in i\mathbb{R}$

x = PARTE REALE DI z

y = PARTE IMMAGINARIA DI z

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

ESEMPIO:

$z = 2 + i3$ $\quad$ 2 = parte reale $\quad$ $i3$ = parte immaginaria

EQUAZIONE:

$z^2 + z + 1 = 0$ ha soluzione $z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ $\quad$ $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

SOMMA

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

ESEMPIO:

$z_1 = 1 + i4$

$z_2 = 2 + i3$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = 1 + 2 + i(4 + 3) = 3 + i7$

$zero = 0 = 0 + i0$ = ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad -z_1 = -x_1 - iy_1 \quad z_1 + (-z_1) = 0$

PRODOTTO ricorda la prop distributiva e $i^2 = -1$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 \ominus y_1y_2 \quad (*\ i^2 = -1)$$

ESEMPIO:

$z_1 = 1 + i4$
$z_2 = 2 + i3$ ⇒ $z_1 \cdot z_2 = 2 + i3 + i8 - 12 = -10 + i11$

L'INSIEME $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ È UN CAMPO PERCHÉ SODDISFA LE SEGUENTI 9 PROPRIETÀ

SOMMA ↓ (gruppo):
- A - associativa
- B - commutativa
- C - ∃ elemento neutro = 0
- D - ∀ z ∃ l'opposto $-z$ | $z + (-z) = 0$

PRODOTTO ↓ (gruppo):
- A - associativa
- B - commutativa
- C - ∃ l'elemento neutro = 1
- D - $\forall z \neq 0$ ∃ z^{-1} | $z \cdot z^{-1} = 1$

PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA E DEL PRODOTTO

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

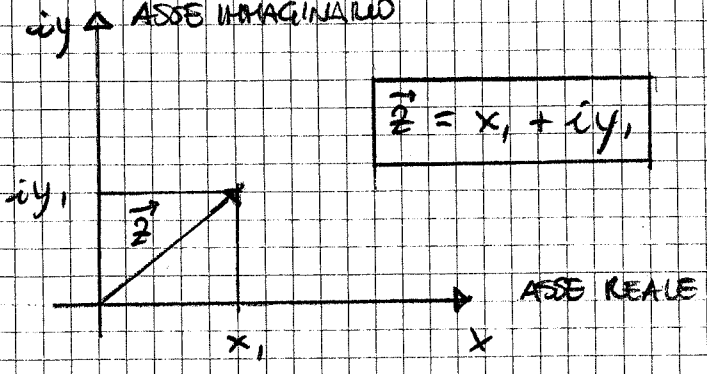
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

N.B.

in $\mathbb{R}$ ∃ la relazione d'ordine $\leq$ / $\geq$

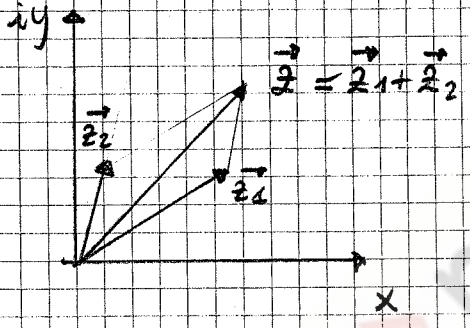
in $\mathbb{C}$ $\nexists$ → presi due numeri non so dire quale è il più grande

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA



$\mathbb{C} \leftrightarrow$ vettori del piano

somma $\leftrightarrow$ somma vettoriale



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

RECIPROCO

$z = 3+i2$

esiste $z^{-1} = a+ib \mid (3+i2)(a+ib) = 1 = 1+i0$

$(3a-2b) + i(2a+3b) = 1+i0$

eguagliamo $\begin{cases} Re = Re \\ Im = Im \end{cases}$

$\begin{cases} 3a-2b=1 \\ 2a+3b=0 \end{cases}$ con a e $b \in \mathbb{R}$

$\cdot\frac{2}{3}$

$3a + \frac{4}{3}a = 1$

$13a = 3 \quad \boxed{a = \frac{3}{13}} \qquad \frac{6}{13} + 3b = 0 \quad \boxed{b = -\frac{2}{13}}$