INDUZIONE

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots; \}$ insieme dei numeri naturali

In $\mathbb{N}$ ∃ UNA RELAZIONE D'ORDINE $\leq$

Esempio: $4 \leq 7$; $9 \leq 5$

ASSIOMA DEL BUON ORDINAMENTO:

$A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ ∃ UN ELEMENTO MINIMO PER A

INDUZIONE: "Principio per dimostrare una proposizione $p(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ se è vera per n allora è vera per $(n+1)$

I^a FORMA DI INDUZIONE

1- $p(0)$ è vera

2- $p(n)$ vera $\Rightarrow p(n+1)$ vera

Allora $p(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Oss Induzione vale sostituendo 0 con un certo n fissato

$0 \leftrightarrow n_0$ fissato

In questo caso la tesi sarà vera $\forall n \geq n_0$

Esempio 1

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

"Euristicamente": $1+2+3+4+\dots+n = \underbrace{(n+1)+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)\dots+1}_{(n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)\ n \text{ volte}}$

dimostrazione per Induzione

$n_0 = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ vera

Supponiamo vera $p(n)$: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

vogliamo dimostrare $p(n+1)$: $1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

$\underbrace{1+2+3+\dots+n}+(n+1) =$ per ipotesi induttiva

$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

[Esercizio 1] $b \neq 1 \quad b > 0$

$$1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

[Esercizio 2] La somma dei primi n numeri naturali elevati a $i = n^2$

[Esercizio 3] $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Esempio 2: $p(n)$: $\forall p \in \mathbb{R}, p > -1 \quad (1+p)^n \geq 1 + p \cdot n$

dim per induzione: $n = 0 \quad (1+p)^0 \geq 1 + 0 \cdot p$ vera

Supponiamo vera $p(n)$: $(1+p)^n \geq 1 + np$ vogliamo dimostrare $p(n+1)$:

$$(1+p)^{n+1} \geq 1 + (n+1)p$$

dim $(1+p)^{n+1} = (1+p)^n (1+p) \geq (1+pn)(1+p) = 1 + np + p + np^2 =$ (per ipotesi induttiva)

$$= 1 + (n+1)p + np^2 \geq 1 + (n+1)p$$

L'induzione può essere utilizzata per definire applicazioni:

per esempio: il FATTORIALE

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot (n!) \end{cases}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \cdot 1 \quad 3! = 3(2!) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 4! = 4(3!) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

In generale: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Esempio $\forall n \geq 4 \quad n! \geq 2^n$

dim per induzione: $n_0 = 4 \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \geq 16 = 2^4$

supponiamo vera $p(n)$: $n! \geq 2^n$ TESI: $p(n+1)$: $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

dim tesi: $(n+1)! = (n+1)(n!) \geq (n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n$ poiché $(n+1) \geq 2^n = 2^{n+1}$

(per ipotesi induttiva)

S è un insieme:

l'insieme delle parti di S: { Tutti i sottoinsiemi di S }

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Esempio: $S=\{1;2\}$

Insieme delle parti di $S=\{\emptyset;\{1\};\{2\};S\}$

NOTAZIONE: insieme delle parti $=\mathcal{P}(S)$

Esempio: $S=\{1;2;3\}$ $\mathcal{P}(S)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1;2\},\{2;3\},\{3;1\},S\}$

proposizione $S=\{x_1;\dots;x_n\}$ n elementi $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(S)$ contiene 2^n elementi

dim per induzione: $p(n)$: $n_0=1$ $S=\{x_1\}$ $\mathcal{P}(S)=\{\emptyset;S\}$ $\mathcal{P}(S)$ ha 2^1 elementi

supponiamo vera $p(n)$: $S'=\{x_1;\dots;x_n\}$ $\mathcal{P}(S')$ ha 2^n elementi

TESI: $S=\{x_1;\dots;x_n;x_{n+1}\}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(S)$ ha 2^{n+1} elementi

Poniamo $\overline{\mathcal{P}}(S)=\{X\subseteq S / x_{n+1}\in X\}$ e $\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)=\{X\subseteq S / x_{n+1}\notin X\}$

Abbiamo ① $\mathcal{P}(S)=\overline{\mathcal{P}}(S)\cup\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)$ ② $\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)=\mathcal{P}(S')$ hanno 2^n elementi

③ $\exists$ applicazione biiettiva $\overline{\mathcal{P}}(S)\longrightarrow\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)$ $X\longmapsto X\cup\{x_{n+1}\}$

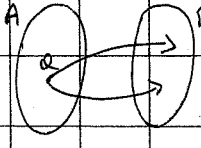
ad ogni insieme che non contiene x_{n+1} gli appiungo x_{n+1}

l'applicazione è BIGETTIVA $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{P}}(S)$ e $\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)$ hanno lo stesso numero di elementi $=2^n$

Conclusione: $\mathcal{P}(S)=\overline{\mathcal{P}}(S)\cup\overline{\overline{\mathcal{P}}}(S)$ (disgiunta) $\Rightarrow$ numero di elementi di $\mathcal{P}(S)=2^n+2^n=2^{n+1}$

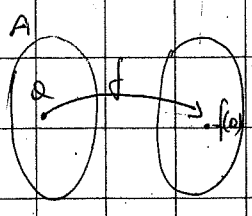
RICHIAMIAMO funzioni (o Applicazioni)

Dati $A;B$ insiemi, una funzione f da $A\to B$ è una Relazione t.c $\forall$ elemento $a\in A$ è definita univocamente $f(a)$ cioè:

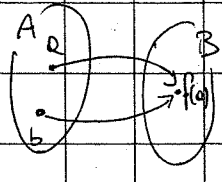


non è funzione!

NOTAZIONE $f: A\to B$, $a\mapsto f(a)$



può accadere



□

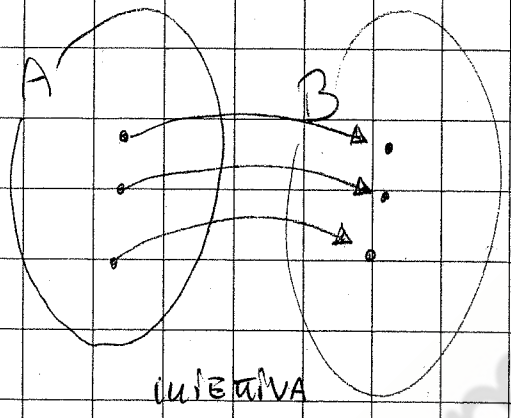
$f: A \to B$
$a \mapsto f(a)$

funzione INIETTIVA

$f: A \to B$
$a \mapsto f(a)$

si dice INIETTIVA se

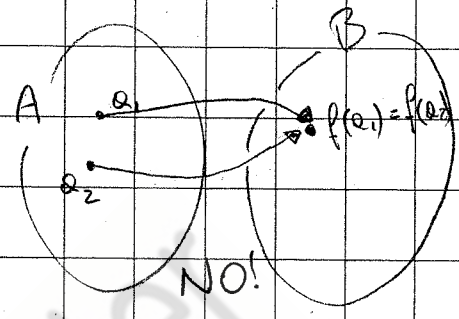
$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$



INIETTIVA

equivalentemente:

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



NO!

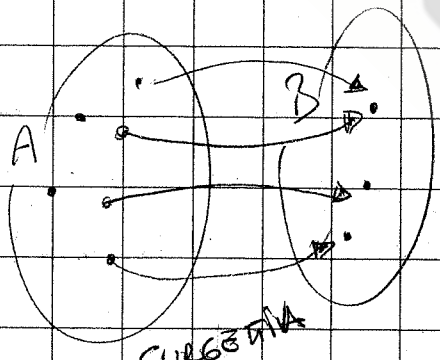
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

funzione SURIETTIVA (SURGETTIVA)

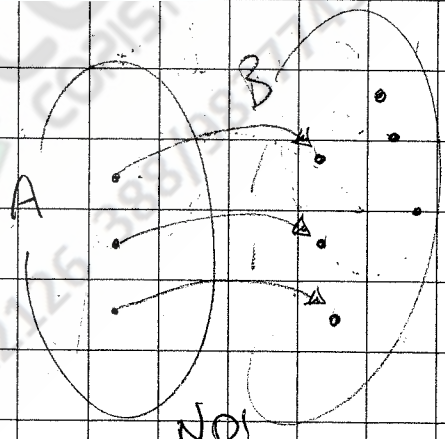
$f: A \to B$
$a \mapsto f(a)$

si dice SURIETTIVA se

$\forall b \in B \ \exists a \in A$ tale che $f(a)=b$



SURGETTIVA



NO!

[Esercizi]

1. $\exists\, f: \{1;2;3\} \to \{1;2;3;4;5;6\}$ iniettiva, se si individuano quante sono tutte le possibili f iniettive. 18

2. $\exists\, f: \{1;2;3\} \to \{1;2;3;4;5;6\}$ suriettiva ? no

FUNZIONE BIGETTIVA (o BIETTIVA)

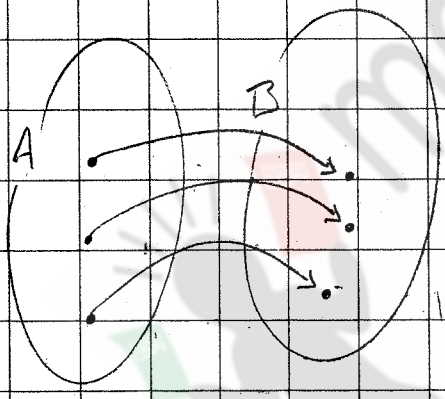
$f: A \to B$ si dice BIETTIVA se f è INIETTIVA E SURIETTIVA

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

se f è bigettiva allora

$\exists$ una corrispondenza biunivoca da A in B



[Esercizi]

3. Determinare il numero delle $f: \{1;2;3;4\} \to \{1;2;3;4\}$

4. Determinare il numero delle funzioni $f: \{1;2;3;4\} \to \{1;2;3;4\}$ BIETTIVE.

Oss $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \to n+1$

f è iniettiva

f non è suriettiva perché non $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $n+1 = 0$

0 non è immagine di f.

[Esercizio]

$\exists\, f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bigettiva