INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = {(insieme) numeri naturali} = $\{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = {numeri interi} = $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = {numeri razionali} = $\left\{ \frac{p}{q} : q \neq 0 \quad p, q \in \mathbb{Z} \right\} / \sim$

↳ relazione di equivalenza

$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff p \cdot q' = p' q$

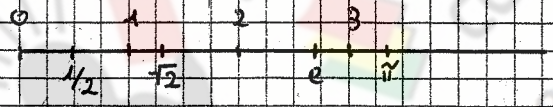
MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$\mathbb{R}$ = {numeri reali}

- data una retta e fissata l'origine $\Leftrightarrow$ 0
- unità di misura $\Leftrightarrow$ 1

→ l'insieme dei numeri reali lo identifico come i punti appartenenti alla retta



{numeri reali} $\underset{\text{(corrispondenza)}}{\longleftrightarrow}$ {punti sulla retta}

ESEMPI

In $\mathbb{Z}$ posso risolvere l'equazione $x + 15 = 12$

In $\mathbb{Z}$ NON posso risolvere l'equazione $7x + 15 = 12$

In $\mathbb{Q}$ posso risolvere l'equazione $7x + 15 = 12$

In $\mathbb{Q}$ NON posso risolvere l'equazione $x^2 - 2 = 0$

In $\mathbb{R}$ $x^2 - 2 = 0 \rightarrow \exists$ 2 soluzioni $-\sqrt{2}$ $+\sqrt{2}$

esercizio $\sqrt{2}$ e $\mathbb{Q}$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\qquad (\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$ con p, q primi fra loro

$2 = \frac{p^2}{q^2} \rightarrow p, q$ pari ASSURDO

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **CAMPO**

In $\mathbb{R}$ ∃ 2 operazioni (somma e prodotto)

Somma

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \to x+y$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ = prodotto cartesiano = {coppie di numeri (x,y)}

PROPRIETA':
- associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$
- commutativa: $a+b = b+a$
- elemento neutro: 0 t.c. $0+b = b+0 = b \quad \forall b$
- opposto: $\forall b \; \exists$ (unico) $-b$ t.c. $b+(-b) = 0$

Prodotto

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x \cdot y$

PROPRIETA':
- Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- elemento neutro: 1 t.c. $1 \cdot b = b \cdot 1 = b \quad \forall b$
- reciproco (opposto moltiplicativo)

$\forall b \neq 0 \; \exists$ (unico) b^{-1} t.c. $b \cdot (b^{-1}) = 1$

PROPRIETA' DISTRIBUTIVA (collega $+, \cdot$)

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

un insieme con 2 operazioni $+, \cdot$ che gode di queste proprietà si chiama **CAMPO**

es: $\mathbb{R}$ è un campo ordinato

i = unità immaginaria

$x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1}$

i risolve l'equazione $x^2 + 1 = 0$) vogliamo mantenere le stesse proprietà di $\mathbb{R}$, in particolare $-i$ è un'altra soluzione dell'eq.

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = \boxed{-i}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-i) \cdot (-i) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^0 = 1$ → x. definizione

$i = i^5 = i^9 = \dots$

$i^6 = i^2 = -1$ (come un orologio che va in senso antiorario)

$1 = i^0 = i^4 = i^8 = \dots$

$-i = i^3 = i^7 \dots$

es: $i^{1212} = 1$ → xk 1212 multiplo di 4

$i^{37} = i^{36+1} = i^{36} \cdot i = 1 \cdot i = i$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

FUNZIONI

$f: \underset{\text{(dominio)}}{A} \to \underset{\text{(codominio)}}{B}$ $\qquad a \in A$

$a \mapsto f(a)$ $\qquad f(a) \in B$

è una relazione tra A e B t.c. $\forall a \in A \ \exists$ unico $f(a) \in B$



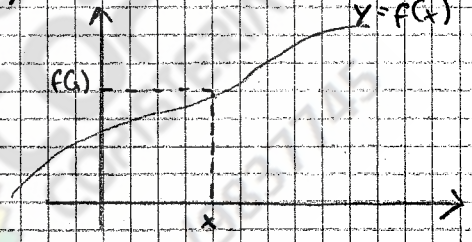
NO!

$$\text{grafico} = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

se $A = B = \mathbb{R}$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

$$\text{grafico di } f = \{(x,y) : y = f(x)\}$$

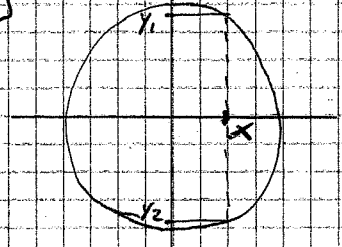


OSS. 1 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ grafico di f è una curva nel piano cartesiano

OSS. 2 $\quad$ non tutte le curve del piano sono grafico di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

esempio: $\quad C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

circonferenza $\begin{cases} \text{c} (0,0) \\ r = 1 \end{cases}$



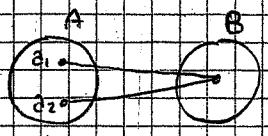
funzione iniettiva

$f: A \to B$
$a \longmapsto f(a)$

f è iniettiva se $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ (implica)

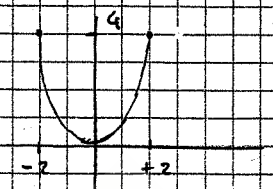
è equivalente a dire

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



NO!

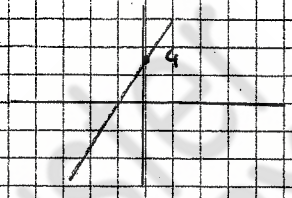
esempi: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$



$f(2) = f(-2) = 4$

NON è iniettiva

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x + 4$



per vedere se f è iniettiva supponiamo $\exists x_1, x_2$ t.c.

$f(x_1) = f(x_2)$

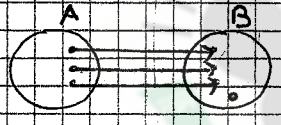
$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$

$x_1 = x_2$

f è iniettiva

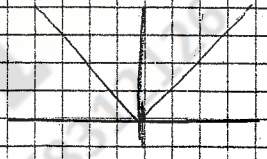
funzione surgettiva (o suriettiva)

se $\forall b \ \exists a$ t.c. $b = f(a)$



NO!

*x tutti gli elementi devono essere raggiunti da una freccia



NON è surgettiva

infatti preso $y < 0$ (es: -5)

non $\exists x$ t.c. $|x| = y < 0$

$|x| = -5$ impossibile!

esempi: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto |x|$

• $f(x) = 3x + 4$

f è surgettiva

infatti fissato $\bar{y}$ cerco $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{y}$

ovvero devo risolvere l'eq $3\bar{x} + 4 = \bar{y}$

soluzione: $\bar{x} = \dfrac{\bar{y} - 4}{3}$

f. bigettiva (o biettiva)

se f è iniettiva e surgettiva

MASTER COPY
Tel. 388/9837745