# NOZIONI INSIEMI

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ $C_X(A) = X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$

$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \; b \in B\}$

$P(A)$ = insieme di tutti i sottoinsiemi di $A = \{B \mid B \subseteq A\}$ $|P(A)| = 2^n$

# FUNZIONI

Legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B

funzione iniettiva: $\forall a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ associa a elementi distinti di D elementi distinti di C

funzione composta: $f: A \to B$ $g: B \to C$ composta: $f: A \to C = g \circ f$

composta di f. i è iniettiva, composta di f. s. è suriettiva

- funzione suriettiva: $\forall b \in B \; \exists a \in A \mid f(a) = b$ cioè' ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio
- funzione biunivoca: (corrispondenza 1:1) se $f: A \to B$ e $\forall b \in B \; \exists! a \in A$ tale che $f(a) = b$

Se $f: A \to B$ iniettiva $\Rightarrow \exists g: B \to A \mid g \circ f = id_A$, g è inverso Sx

Se $f: A \to B$ è suriettiva $\Rightarrow \exists g: B \to A \mid f \circ g = id_B$, g è " dx

Se $f: A \to B$ biiettiva $\Rightarrow \exists! g: B \to A \mid g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$

$\Rightarrow$ l'inversa è unica. Se $f(x)$ periodica $f(x+T) = f(x)$, $g \neq (f)$ è uguale per T più piccolo di tutti

# PRINCIPIO DI INDUZIONE

Permetta di dimostrare che $P(n)$ è vera senza fare controlli se

1. passo base: $P(0)$ è vera
2. " induttivo: $P(n)$ è vera $\Rightarrow P(n+1)$ è vera $\Rightarrow P(n)$ è vera $\forall n$

# TEOREMI FUNZIONI

- Se f è strettamente monotona, cioè strettamente crescente o strettamente decrescente, è iniettiva

DIM: sia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ e $a > b$ se f str. cr. $f(a) > f(b)$, se è str. decr. $f(a) < f(b)$, in ogni caso $f(a) \neq f(b)$

- Se f pari, $gr(f)$ simmetrico rispetto all'asse y, se dispari $gr(f)$ simmetrico rispetto all'origine

- Siano A, B insiemi, $|A| \leq |B|$ se $\exists f: A \to B$ iniettiva, $|A| \geq |B|$ se $\exists g: A \to B$ suriettiva e $|A| = |B|$ se $\exists h: A \to B$ biiettiva

## PROPRIETÀ DI $\mathbb{N}$

- A si dice numerabile se $|A| = |\mathbb{N}|$, $\mathbb{N}$ gode del concetto di successivo $n+1$, è un insieme totalmente ordinato, ovvero vogliamo:
  - proprietà riflessiva: $\forall n \in \mathbb{N}\ n \leq n$
  - " antisimmetrica: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ t.c. $\begin{cases} n \leq m \\ m \leq n \end{cases} \Rightarrow n = m$
  - " transitiva: $\forall n, m \in \mathbb{N}$ t.c. $\begin{cases} n \leq m \\ m \leq r \end{cases} \Rightarrow n \leq r$
  - buon ordinamento: ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un minimo
- Metodo diagonale di Cantor: dimostra che non esiste corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{N}$, quindi l'infinito dei numeri reali è più grande di quello dei naturali (non numerabilità dei numeri reali) e consiste nel costruire $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca, mise in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ dimostrando che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ cioè hanno la stessa numerosità (potenza del continuo). Dimostrò che c'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ ma $\mathbb{R}$ non è numerabile
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ campi cioè sono insiemi dotati di tutte le proprietà di $+$ e $\cdot$. $\mathbb{N}$ monoide cioè dotato di un'operazione binaria associativa $(+)$ e di un elemento neutro. $\mathbb{Z}$ è un anello, è cioè definito da somma e prodotto e gode di proprietà simili a quelle di $\mathbb{N}$

Teorema: Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$

DIM: Supponendo per assurdo che $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ t.c. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ e assumendo $\frac{p}{q}$ ridotto ai minimi termini, per cui $p$ e $q$ non sono entrambi pari: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \to p^2 = 2 \cdot q^2$ $2 \cdot q^2$ è pari $\to p^2$ è pari cioè $p = 2 \cdot k \to (2k)^2 = 2q^2 \to 4k^2 = 2q^2$ $q^2 = 2k^2 \to q^2$ è pari e anche $p$ è questo assurdo in quanto $p$ e $q$ non posso essere entrambi pari

$x^2 = 2$ si risolve in $\mathbb{R}$ in quanto $\mathbb{R}$ soddisfa l'assioma di continuità: siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $x \leq y \ \forall x \in A$ e $y \in B \Rightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ (elemento separatore) t.c. $x \leq c \ \forall x \in A$ e $c \leq y \ \forall y \in B$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI: Sia $x \geq -1$ allora $(1+x)^n \geq 1+nx$

DIM: per induzione su $n$, passo base $n = 0$ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \times$ (ok) passo induttivo: si assume $(1+x)^n \geq 1+nx$ e devo dimostrare che $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \rightarrow (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$
$(1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+x(n+1)+nx^2 \geq 1+(n+1)x$
in quanto $nx^2 \geq 0$

MAGGIORANTE O MINORANTE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, un maggiorante per $A$ è un numero $m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \geq a \ \forall a \in A$, viceversa un minorante per $A$ è un $m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a \ \forall a \in A$

- $A$ limitato superiormente se ammette un maggiorante (e dunque ne ha infiniti). $A$ limitato inferiormente se ha un minorante
- $m$ è un max per $A$ se $m \in A$ e $m \geq a \ \forall a \in A$, se $\exists$ è unico
  $m$ è un min di $A$ se $m \in A$ e $m$ è un minorante di $A$
  $\Rightarrow$ se $A$ ammette max $\Rightarrow$ ha un maggiorante $\Rightarrow$ è limitato superiormente
- se $A$ non è limitato superiormente, $\sup A = +\infty$, se $A$ è limitato superiormente, ammette un maggiorante e $\sup A$ è il minimo dei maggioranti

TEOREMA: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ allora $A$ ammette un sup (e inf) unico

DIM: se $A$ non è limitato superiormente ok: $\sup A = +\infty$, altrimenti, sia $B$ l'insieme dei maggioranti di $A$, poiché $A$ è limitato superiormente, $B \neq \emptyset$. Per def. di maggiorante $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a \leq b$, per l'assioma di continuità $\exists\, m \in \mathbb{R}$

t.c. $a \leq m \leq b$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Poiché $m \geq a$, $m$ è un maggiorante perciò $m \in B$. E $m \leq b \Rightarrow m = \min B \Rightarrow m$ è il sup di $A$ ed è uno $\min$ di $B$

- Se $A$ è illimitato inferiormente, $\inf A = -\infty$, altrimenti $\inf A$ è il max dei minoranti di $A$ (anche l'inf è unico)

TEOREMA: $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m$ è il max di $A \iff m = \sup A$ e $m \in A$
(non è detto che $A$ ha sempre un max)

DIM: $m = \max A \Rightarrow m \in A$ e $m \geq a \ \forall a \in A \Rightarrow m \in A$ e $m$ è un maggiorante. Se $b$ è un maggiorante di $A$ poiché $m \in A$, vale anche $b \geq m$, dunque $m$ è il minimo dei maggioranti $\Rightarrow m \in A$ e $m = \sup A$
Se $m = \sup A$ e $m \in A \Rightarrow m$ è un maggiorante di $A$ e $m \in A \Rightarrow$ $m = \max A$

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEL SUP) Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$

① $\sup A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ t.c. $a > M$

② $\sup A = m \in \mathbb{R} \iff m \geq a \ \forall a \in A$ e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ t.c. $a > m - \varepsilon$

DIM:

① $\sup A = +\infty \iff$ non ci sono maggioranti

② $\sup A = m \iff m$ è un maggiorante e se $b < m$, $b$ non è un maggiorante $\iff m \geq a \ \forall a \in A$ e se $b < m \Rightarrow \exists a \in A$ con $a > b$
$\iff m \geq a$ e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A$ con $a > m - \varepsilon$ $(b = m - \varepsilon)$

## SUCCESSIONI

Sono funzioni $f: \mathbb{N} \to X$ che associano $n \to f_n$ e sono a valori reali definite su $\mathbb{N} \geq n_0$ def.te cioè $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. la proprietà $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$ (da un certo punto in poi).

Una successione è non costante

- Una successione è convergente se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists l \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$ cioè fissata una striscia di raggio $\varepsilon$ $[l - \varepsilon \ \ l + \varepsilon]$ "comunque stretta", da un certo punto in poi i punti della successione non escono più da questa striscia $\Rightarrow$ ogni successione convergente è limitata

• Una successione è monotona se lo è come funzione, è strettamente crescente se $\forall n > n \Rightarrow a_n > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ $\forall n$

TEOREMA DI MONOTONIA (versione crescente): sia $a_n$ una successione crescente e superiormente limitata $\Rightarrow$ $a_n$ è convergente e il suo limite è uguale a $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

DIM: poiché $a_n$ limitata superiormente $\Rightarrow \exists \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall n$ $a_n \to l \Rightarrow l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ def.te. $l = \sup \Rightarrow l$ è il minimo dei maggioranti di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow l-\varepsilon < l \Rightarrow l-\varepsilon$ non è un maggiorante dell'insieme $\Rightarrow \exists\, a_{n_0} > l-\varepsilon$. La successione è monotona crescente $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \; a_n \geq a_{n_0} \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > l-\varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ ossia def.te $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

• la successione si dice monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ (viceversa per decrescente)

• Quando al crescere di $n$ $a_n$ supera qualsiasi $M > 0 \Rightarrow$ diverge a $+\infty$, se scende al di sotto di $-M \Rightarrow$ diverge a $-\infty$

## LIMITI

• $a_n \to l^+$ (da destra) se $\forall \varepsilon > 0 \quad l < a_n < l+\varepsilon$ def.te (da sopra)

• $a_n \to l^-$ (da sinistra) se $\forall \varepsilon > 0 \quad l-\varepsilon < a_n < l$ def.te (da sotto)

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE: Sia $a_n$ una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora $l_1 = l_2$

DIM: Supponiamo per assurdo $l_1 < l_2$ e sia $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{3} > 0$ per definizione di limite $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $l_1 - \varepsilon < a_n < l_1 + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $l_2 - \varepsilon < a_n < l_2 + \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

Sia $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Allora $a_{n_2} < l_1 + \varepsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{3} = \frac{2l_1 + l_2}{3}$ ; $a_{n_2} > l_2 - \varepsilon = l_2 - \frac{l_2 - l_1}{3} = \frac{l_1 + 2l_2}{3}$

Ciò è assurdo in quanto $\frac{2l_1 + l_2}{3} < \frac{l_1 + 2l_2}{3}$ (perché $l_2 > l_1$)