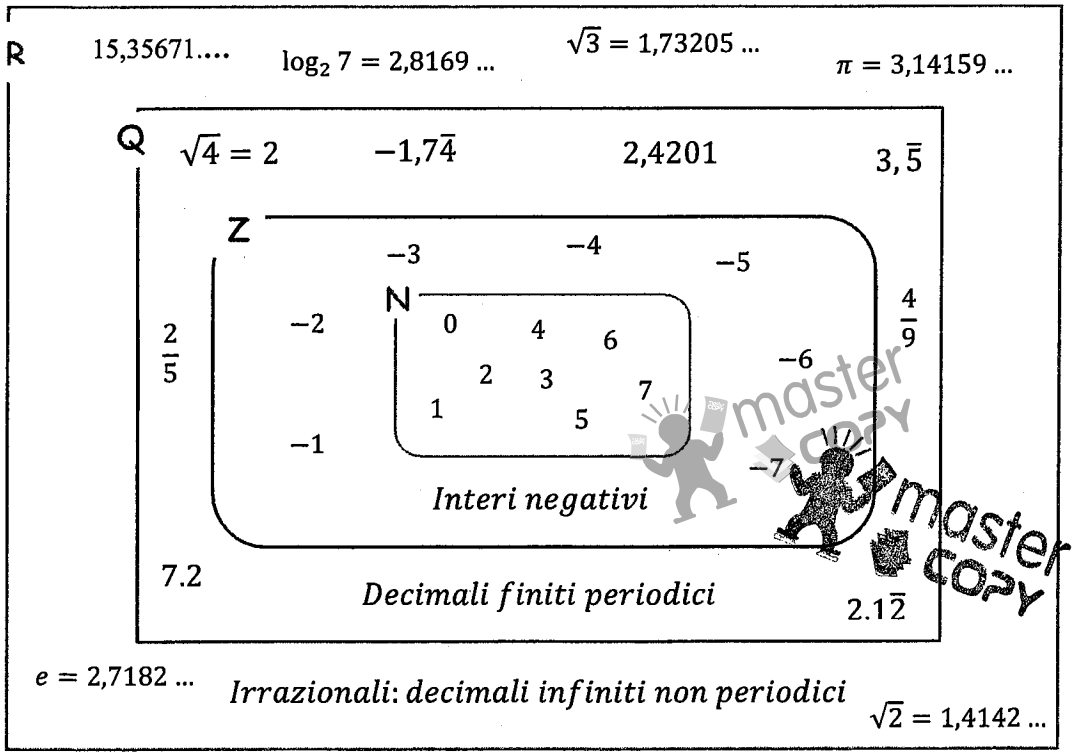
Insiemi numerici

numeri naturali N	numeri interi (o interi relativi) Z
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...
numeri razionali Q	**numeri irrazionali I**
un numero si dice razionale se può essere espresso come rapporto di due numeri interi (con denominatore diverso da zero), cioè se può essere espresso sotto forma di frazione I numeri razionali possono essere: • numeri interi • numeri decimali finiti • numeri decimali periodici semplici • numeri decimali periodici misti	un numero si dice irrazionale se NON può essere espresso come rapporto di due numeri interi (con denominatore diverso da zero), cioè se NON può essere espresso sotto forma di frazione I numeri irrazionali sono: • numeri decimali infiniti **non** periodici
$3 = \frac{3}{1}$	$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$
$2{,}3 = \frac{23}{10}$	$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$
$2{,}\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$	$\pi = 3{,}141592\ldots$
$2{,}5\overline{3} = \frac{253-25}{90} = \frac{228}{90} = \frac{38}{15}$	$e = 2{,}718281\ldots$

numeri reali R

i numeri reali sono formati dall'unione dell'insieme dei numeri razionali Q e l'insieme dei numeri irrazionali I



Osserva che: $N \subset Z \subset Q \subset R$

© 2019 - www.matematika.it

Insiemi numerici

numeri algebrici e numeri trascendenti

esiste anche un'altra classificazione che divide i numeri reali in numeri algebrici e numeri trascendenti

- un numero si dice ***algebrico*** se è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali
- un numero si dice ***trascendente*** se NON è soluzione di una equazione polinomiale a coefficienti razionali

esempi

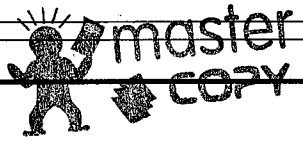
- 5 è un numero **algebrico** perché è soluzione dell'equazione $x - 5 = 0$
- $\sqrt{5}$ è un numero **algebrico** perché è soluzione dell'equazione $x^2 - 5 = 0$
- $\pi = 3{,}1415\ldots$ è un numero **trascendente** perché **non** è soluzione di nessuna equazione polinomiale a coefficienti razionali.
  Nota che π è soluzione dell'equazione polinomiale $x - \pi = 0$ che **non** è a coefficienti razionali



i numeri razionali Q sono tutti algebrici
i numeri irrazionali I possono essere sia algebrici che trascendenti

ad esempio:

- 5 è un numero **razionale** ed **algebrico**
- $2{,}3$ è un numero **razionale** ed **algebrico**
- $4,\overline{52}$ è un numero **razionale** ed **algebrico**
- $\sqrt{5}$ è un numero **irrazionale** ed **algebrico**
- $\pi = 3{,}14\ldots$ è un numero **irrazionale** e **trascendente**
- $e = 2{,}718\ldots$ è un numero **irrazionale** e **trascendente**



oltre i numeri reali

oltre i numeri reali esistono i numeri immaginari ed i numeri complessi:

- un **numero immaginario** si ottiene dalla radice quadrata di un numero negativo ponendo: $i = \sqrt{-1}$
  ad esempio:

$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$	$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$	$\sqrt{-20} = \sqrt{20 \cdot (-1)} = 2\sqrt{5}i$

- un **numero complesso z** è la somma di un numero reale e di un numero immaginario: $z = a + ib$
  ad esempio:

$z = 2 + 3i$	$z = 3 - 5i$	$z = -2 + 7i$	$z = \sqrt{2} + \sqrt{7}i$

L'insieme dei numeri complessi si indica con la lettera C
Osserva che: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

In alcuni testi l'insieme dei numeri naturali N non contiene lo zero e quindi $N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$

© 2019 - www.matematika.it

Simbologia e Convenzioni

simbolo	significato	simbolo	significato
$=$	uguale	$<$	minore
$\neq$	diverso	$\leq$	minore o uguale
$\sim$	circa uguale, approssimato	$\|x\|$	valore assoluto di x o modulo di x
$>$	maggiore	$+\infty$	più infinito
$\geq$	maggiore o uguale	$-\infty$	meno infinito
$\emptyset$	insieme vuoto	I	insieme dei numeri irrazionali
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali	$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi	$\Im$	insieme dei numeri immaginari
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali	$\mathbb{C}$	insieme dei numeri complessi
$\forall$	per ogni	$/$	tale che
$\exists$	esiste (almeno un)	$:$	tale che
$\exists!$	esiste ed è unico	$\subset$	incluso strettamente
$\nexists$	non esiste	$\subseteq$	incluso
$\in$	appartiene	$\cup$	unione
$\notin$	non appartiene	$\cap$	intersezione
$[a, b]$	intervallo chiuso, cioè contiene gli estremi	$[a, b)$	intervallo chiuso inferiormente e aperto superiormente
(a, b)	intervallo aperto, cioè esclude gli estremi	$(a, b]$	intervallo aperto inferiormente e chiuso superiormente
$\parallel$	parallelo	$\doteq$	equivalente
$\perp$	perpendicolare	$\approx$	simile
$\cong$	congruente	$\overline{AB}$	lunghezza del segmento AB
V	vero	$\wedge$	e
F	falso	$\Rightarrow$	implica (se ... allora)
$\vee$	o	$\Leftrightarrow$	doppia implicazione (se e solo se)
$ln\, x$	logaritmo naturale in base "e"	$n!$	fattoriale di n
$log\, x$	logaritmo decimale in base 10	$P(E)$	probabilità che si verifichi l'evento E
$\sin \alpha$	seno dell'angolo alfa	$\cot \alpha$	cotangente dell'angolo alfa
$\cos \alpha$	coseno dell'angolo alfa	$\sec \alpha$	secante dell'angolo alfa
$\tan \alpha$	tangente dell'angolo alfa	$\operatorname{cosec} \alpha$	cosecante dell'angolo alfa

© 2019 - www.matematika.it

Funzione: definizione e tipi

definizione

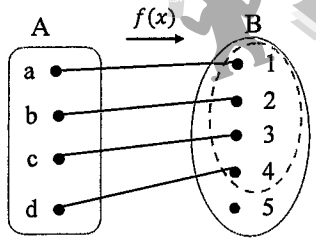
Dati due insiemi A e B, si dice ***funzione*** una legge che associa **ad ogni** elemento dell'insieme A **uno ed un solo** elemento dell'insieme B.

Una funzione si indica con $y = f(x)$, dove:

- x è un generico elemento di A ed $f(x)$ o y si chiama *immagine* di x ed appartiene all'insieme B
- l'insieme **A** viene chiamato **dominio** o **campo di esistenza** di $f(x)$
- il sottoinsieme di **B** formato dalle immagini di tutti gli elementi del dominio si chiama **codominio** di $f(x)$.

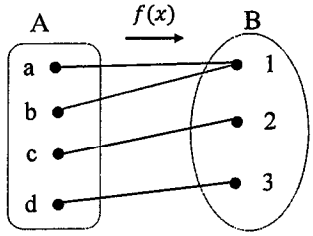
In alcuni testi l'insieme **B** viene detto **codominio** e il sottoinsieme di B contente gli elementi associati ad A viene detto **immagine di A**

tipi di funzione: iniettiva, suriettiva, biunivoca



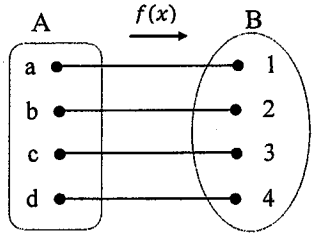
funzione **iniettiva**

- una funzione si dice **iniettiva** quando ad elementi distinti dell'insieme A corrispondono elementi distinti dell'insieme B
- $f(x)$ iniettiva $\Leftrightarrow \; x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- la funzione della figura a sinistra è iniettiva ma non suriettiva
- l'insieme A è il dominio, il ***sottoinsieme*** di B contenente gli elementi $\{1, 2, 3, 4\}$, associati ad elementi di A, rappresenta il codominio di $f(x)$



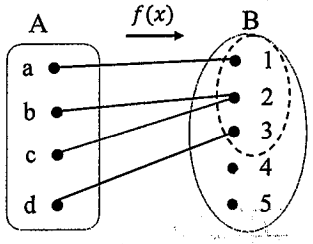
funzione **suriettiva**

- una funzione si dice **suriettiva** quando ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A
- $f(x)$ suriettiva $\Leftrightarrow \; \forall\, y \in B \;\; \exists\, x \in A : f(x) = y$
- la funzione della figura a sinistra è suriettiva ma non iniettiva
- l'insieme A è il dominio, *tutto* l'insieme B è il codominio di $f(x)$



funzione **biunivoca** o biettiva

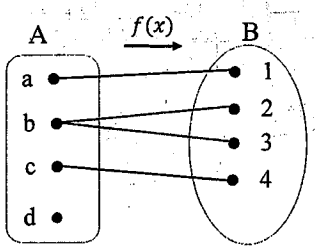
- una funzione si dice **biunivoca** (o biettiva) quando è sia iniettiva che suriettiva, cioè quando ad ogni elemento dell'insieme A corrisponde uno ed un solo elemento dell'insieme B e **viceversa**
- $f(x)$ biunivoca $\Leftrightarrow \; \forall\, x \in A \;\; \exists!\; y \in B : f(x) = y$ e viceversa
- l'insieme A è il dominio, *tutto* l'insieme B è il codominio di $f(x)$



funzione non iniettiva, non suriettiva

la funzione della figura a sinistra:

- NON è iniettiva perché gli elementi distinti "b, c" dell'insieme A hanno la stessa immagine "2"
- NON è suriettiva perché non tutti gli elementi dell'insieme B ("4, 5") sono immagine di un elemento dell'insieme A
- l'insieme A è il dominio, il ***sottoinsieme*** di B che contiene gli elementi $\{1, 2, 3\}$, associati ad elementi di A, rappresenta il codominio di $f(x)$



corrispondenza

la legge rappresentata nella figura a sinistra **non** è una funzione perché non ne soddisfa la definizione, infatti:

- all'elemento "b" dell'insieme A sono associati più elementi ("2, 3") dell'insieme B.
- l'elemento "d" dell'insieme A non è associato ad alcun elemento dell'insieme B.

la legge non è una funzione ma prende il nome di **corrispondenza**

© 2018 - www.matematika.it

Se A e B sono insiemi finiti: $|A| = n$, $|B| = m$

$A \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{N}_n = \{i \mid 1 \leq i \leq n\} = f_1$

$B \longleftrightarrow \mathbb{N}_m = f_2$

Se $m \neq n$ non esiste una funzione bigettiva tra A e B

Se $m = n$ allora esiste una $f: A \xrightarrow[1:1]{} B$ bigettiva

$f: A \xrightarrow{f_1} \mathbb{N}_n = \mathbb{N}_m \xrightarrow{f_2^{-1}} B$

$f = f_2^{-1} \circ f_1$

Definizione di funzioni uguali:

Date:

$h: A \rightarrow B$

$g: A \rightarrow B$

$h = g \Leftrightarrow h(a) = g(a) \ \forall a \in A$

ESERCIZIO

$f: A \rightarrow B$ iniettiva

$\exists g: B \rightarrow A$ t.c.

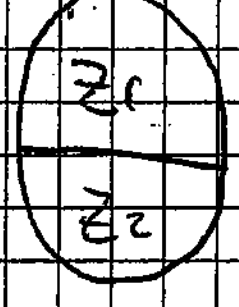
$g \circ f = id_A$

$$g(b) = \begin{cases} a \text{ t.c. } f(a) = b, & \text{se } b \in \text{Immagine } f \subseteq B \\ a_0 \ (a_0 \in A), & \text{se } b \notin \text{Immagine } f \end{cases}$$

con $g \circ f(a) = g(f(a)) = a \ \forall a \in A$ con $f(a) = b \in \text{Im} f$

OSS: Se h è una funzione da X a Y ($h: X \rightarrow Y$) con $X = Z_1 \sqcup Z_2$ allora h è ben definita quando sono definite le immagini di Z_1 e Z_2

$\sqcup$ ← UNIONE DISGIUNTA



Cerco una $g: B \rightarrow A$ ma posso esprimere B come

$B = \text{Immagine} f \sqcup C_B(\text{Im} f)$

$C_B(\text{Im} f) = B \setminus \text{Im} f$

- stessa cosa per suriettiva

f bigettiva $\Rightarrow \exists! \, g: B \rightarrow A$

$f: A \rightarrow B$ t.c. $g \circ f = id_A$

$f \circ g = id_B$

Chiamiamo g inversa di A.

master COPY