ESERCITAZIONI DI ALGEBRA LINEARE

ESERCIZI SVOLTI TRATTI DA LEZIONE E DA PROVE D'ESAME

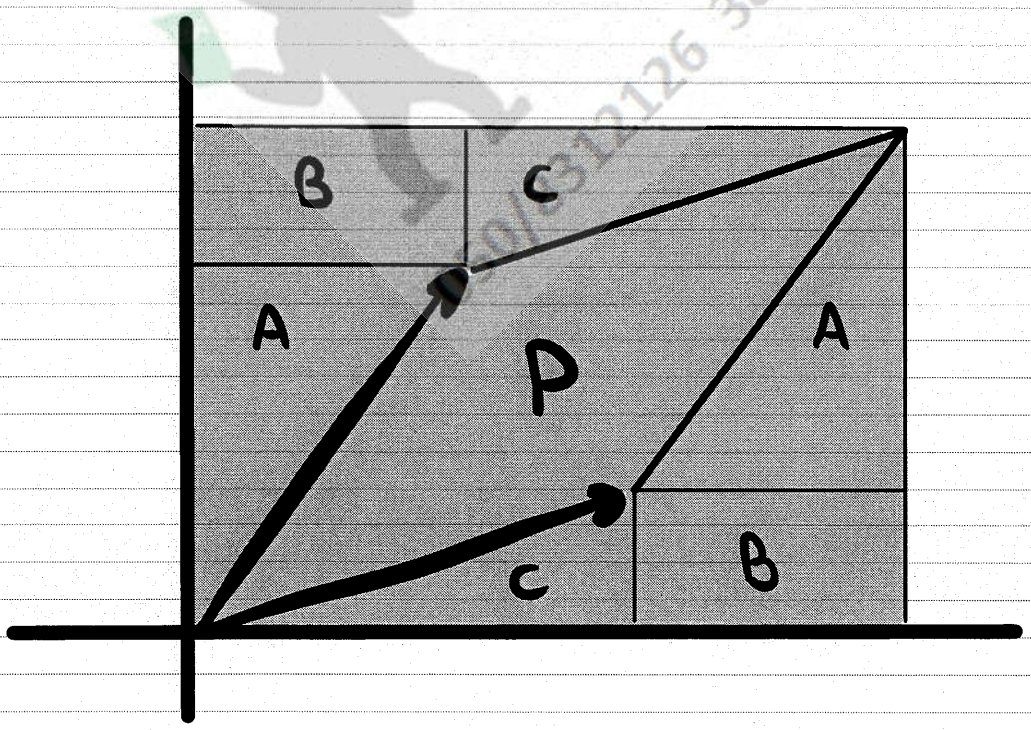
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PROF. GALATOLO

ANNO: 2017 - 2018

CORSO: INGEGNERIA ELETTRONICA

APPUNTI DI EDOARDO ORZES



APPLICAZIONI LINEARI, SPAZIO VETTORIALE E SOTTOSPAZIO

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ → INDENTIFICATI COME VETTORI

AD OGNI APPLICAZIONE È ASSOCIATA UNA MATRICE

OGNI ELEMENTO SI SCRIVE IN RELAZIONE AGLI ELEMENTI DELLA BASE SCELTA (COMBINAZIONE LINEARE)

OGNI ELEMENTO DELLO SPAZIO DI ARRIVO SI SCRIVE IN RELAZIONE AGLI ELEMENTI DELLA BASE DI ARRIVO

$f(e_1)$ MI DÀ LA PRIMA COLONNA DELLA MATRICE ASSOCIATA

CAMBIANDO BASE CAMBIA LA MATRICE

→ UTILE PER DIAGONALIZZABILE

IL KERNEL MISURA QUANTO DEGENERA L'APPLICAZIONE, PERCHÉ È SOTTOINSIEME DELLO SPAZIO DI PARTENZA, CONTIENE ELEMENTI LA CUI IMMAGINE È 0

L'IMMAGINE È SOTTOINSIEME DELLO SPAZIO DI ARRIVO CONTENENTE GLI $f(x)$

N° RIGHE INDIPENDENTI = N° COLONNE INDIPENDENTI PERCHÉ $RK(A) = RK(A^T)$

SE IL DETERMINANTE È $\neq 0$ GLI ELEMENTI SONO INDIPENDENTI E LA MATRICE È INVERTIBILE

$P^n(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n\}$ $\quad f: P^n \to P^{n-1}$ $\quad f(p) = p' + p(0)$

f È LINEARE?

$f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$?

$= f((a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n + b_0 + b_1 x' + \dots b_n x^n) + (a_0 + b_0) = a_1 + a_2 x + \dots a_n x^{n-1} + b_1 + b_2 x + \dots b_n x^{n-1} + a_0 + b_0$

$= f(p_1) + f(p_2)$ ✓

$f(\lambda p) = \lambda f(p)$?

$= f(\lambda a_0 + \dots) = \lambda (a_1 + \dots$

$= \lambda f(p_1)$ ✓

KERNEL?

$p' + p(0) = 0$

$p' = -p(0)$ $\quad a_0 + a_1 x + \cancel{a_2 x^2 + \dots a_n x^n}$

TUTTI GLI ELEMENTI CON $a_1 = -a_0$

HA DIMENSIONE 1

RK È $n+1$ UNA BASE È $\{1, x \dots x^n\}$, LO SPAZIO DI ARRIVO HA DIMENSIONE n

È LINEARE $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ z \\ x + z \end{pmatrix}$?

$T\begin{pmatrix} x + x_1 \\ y + y_1 \\ z + z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+x_1) - 2(y-y_1) \\ z + z_1 \\ (x+x_1) + (z+z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x - 2y) + (3x_1 - 2y_1) \\ (z) + (z_1) \\ (x+z) + (x_1 + z_1) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ✓ A OCCHIO ANCHE PER $T\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \lambda T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ✓

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (x^3+y^3)^{2/3}$$

$$T\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix} = \left((\lambda x)^3+(\lambda y)^3\right)^{1/3} = \left(\lambda^3x^3+\lambda^3y^3\right)^{1/3} = \left(\lambda^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}} = \lambda\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}} = \lambda T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$T\begin{pmatrix}x+x_1\\ y+y_1\end{pmatrix} = \left((x+x_1)^3+(y+y_1)^3\right)^{1/3} = \left(x^3+3x^2x_1+3xx_1^2+x_1^3+y^3+3y^2y_1+3yy_1^2+y_1^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\neq T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \quad \times$$

$$= \left(x^3+y^3\right)^{2/3} + \left(x_1^3+y_1^3\right)^{2/3}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$[T(P)](t) = P(t+1)$ SE $P(t) = t^2$, $T(P) = (t+1)^2$

$$[T(P+P_1)](t) = (P+P_1)(t+1) = P(t+1) + P_1(t+1)$$

$$= [T(P)](t) + [T(P_1)](t) \quad \checkmark$$

$$[T(\lambda P)](t) = (\lambda P)(t+1) = \lambda\left(P(t+1)\right) = \lambda[T(P)](t) \quad \checkmark$$

$X = \{(x,y) : xy \geq 0\} \in \mathbb{R}^2$ È SOTTOSPAZIO?

CHIUSO IN SOMMA E PRODOTTO?

S: $(x+x')(y+y') \geq 0$

$(1,2) \in X \quad (-2,-1) \in X$

$(1-2)(2-1) = (-1)(1) = -1 < 0$ NON È CHIUSO NELLA SOMMA

$$a \left|\begin{bmatrix}0&0&a\\0&1&a\\0&1&a\end{bmatrix}\right. \quad RK = 3 \quad \text{PER NESSUNO} \qquad RK \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix} \quad RK = 2$$

INDIPENDENTI $D \neq 0$ DIPENDENTI $D = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&0&1\\a&a^1&a^2&a\end{array}\right]$$

PER QUALI a È SURIETTIVA

CERCO IL RANGO MASSIMO CIOÈ 3

PER $a \neq 0$ IL RANGO È 3

$U = \text{SPAN}\left((1,2,3,4),(-1,1,1,2)\right)$ $V = \text{SPAN}\left((1,8,11,16)\right)$ $U, V \in \mathbb{R}^4$ DIM U ? DIM V ? DIM (U+V) ! DIM (U ∩ V) !

$U = \text{SPAN}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right)$ $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

$\dim(U+V) = 2 + 1 - ?$

$\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\\4&2\end{bmatrix}$ DIM U = 2 $\begin{bmatrix}1\\8\\11\\16\end{bmatrix}$ DIM V = 1

TOLGO L'ULTIMO

$U+V = \text{SPAN}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&8\\3&1&11\\4&2&16\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x-y+z=0\\2x-y+8z=0\\3x+y+11z=0\\4x+2y+16z=0\end{cases}$ $\begin{vmatrix}3-2+1=0\\\checkmark\\\checkmark\\\checkmark\end{vmatrix}$ $\begin{cases}x-y=0\\2x-y=0\\3x+y=0\\4x+2y=0\end{cases}$

INDIPENDENTI UNICA SOL.: $x=0, y=0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\begin{matrix}1&-1&1\\2&1&8\\3&1&11\\4&2&16\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\2&1&8\\3&1&11\\0&6&12\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\2&1&8\\0&4&8\\0&6&12\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\0&3&6\\0&4&8\\0&6&12\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\0&3&6\\0&4&8\\0&0&0\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\0&3&6\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-1&1\\0&3&6\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ DIM = 2 ✱

QUINDI $\dim(U+V) = 2$

ALLORA $\dim(U \cap V) = 1$

CERCO BASE E DIM. DI IM(A) E KER(A)

$A = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&1\\3&1&4\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&1\\3&1&4\\-1&-1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&1&-5\\0&-1&5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&1&-5\\0&0&0\end{bmatrix} = S$

QUINDI $\dim(\text{IM}(A)) = 2$, $\dim(\text{KER}(A)) = 1$

$\text{BASE}(A) = \left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&1\\0&1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$ $\begin{bmatrix}-3\\5\\1\end{bmatrix} \in \text{KER}(A)$

CERCO DIM. E BASE DI $U = \text{SPAN}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8\\-5\\6\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\begin{bmatrix}1&-2&8\\0&-1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_1 = -2$ → BASE(KER(U))

$\text{BASE } U = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\begin{bmatrix}1&-2&8\\-1&1&-5\\3&0&6\\2&1&1\end{bmatrix} \to \begin{matrix}1&-2&8\\-1&1&-5\\3&0&6\\0&3&-9\end{matrix} \to \begin{matrix}1&-2&8\\-1&1&-5\\0&3&-9\\0&3&-9\end{matrix} \to \begin{bmatrix}1&-2&8\\-1&1&-5\\0&3&-9\\0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-2&8\\0&-1&3\\0&3&-9\\0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-2&8\\0&-1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\dim(\text{IM}(A)) = 2$

$\dim(\text{KER}(A)) = 1$

CERCO DIM. E BASE DI $U+V$ E $U \cap V$ CON $U \subseteq \mathbb{R}^4$ E $V \subseteq \mathbb{R}^4$

$$U = SPAN\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{INDIPENDENTI}}\right\} \qquad V = SPAN\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\-3&0\\-2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\-3&0\\0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}DIM(IM(V)) = 2\\ DIM(KER(V)) = 0\end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-1&1&1&1\\3&0&-3&0\\2&1&-2&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-1&1&1&1\\3&0&-3&0\\0&3&0&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-1&1&1&1\\0&3&0&3\\0&3&0&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&-1&2&1\\0&3&0&3\\0&3&0&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&-1&2&1\\0&3&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&-1&2&1\\0&0&6&6\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}DIM(IM(U+V)) = 3\\ DIM(KER(U+V)) = 1\end{matrix}$$

$DIM(U+V) = DIM(U) + DIM(V) - DIM(U \cap V) \qquad 3 = 2+2-1 \qquad DIM(U \cap V) = 1$

$X_4 = -1$
$X_3 = 1$
$X_2 = 1$
$X_1 = 1$ → BASE KER(A)

ELEMENTI COSTANTI

SE $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ BASE DI KER(A) ALLORA BASE DI $(U \cap V) = -1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\-1+1\\3&0\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\\3\end{pmatrix}$

SCRIVI IN PARAMETRICA

$$\begin{cases}2X_1 - X_2 + X_3 = 1\\ X_2 + X_3 = 3\\ X_1 + X_3 = 2\end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc}2&-1&1&1\\0&1&1&3\\1&0&1&2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc}1&0&1&2\\0&1&1&3\\2&-1&1&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&-1&-1&-3\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc}1&0&1&2\\0&1&1&3\\0&0&0&0\end{array}\right) \qquad \begin{cases}X_1 + X_3 = 2\\ X_2 + X_3 = 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}X_1 = 2-t\\ X_2 = 3-t\\ X_3 = t\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

BASE DELLO SPAZIO AL QUALE LA MATRICE È ASSOCIATA

SCRIVI IN CARTESIANA

$$\begin{cases}X_1 = 3 + S - t\\ X_2 = -1 + 2S\\ X_3 = 1 + 2t\\ X_4 = S + t\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}S\\t\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + S\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&X_1\\2&0&X_2\\0&2&X_3\\1&1&X_4\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&X_1\\2&0&X_2\\0&2&X_3\\1&1&X_4-X_1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&X_1\\0&2&X_2-2X_1\\0&2&X_3\\0&2&X_4-X_1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&X_1\\0&2&X_2-2X_1\\0&0&X_3-X_2+2X_1\\0&0&X_4-X_2+X_1\end{array}\right) \qquad \begin{cases}X_3 - X_2 + 2X_1 = 0\\ X_4 - X_2 + X_1 = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\1&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+1+1\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}X_3 - X_2 + 2X_1 = 8\\ X_4 - X_2 + X_1 = 4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}3&-\frac{3}{2}\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$