APPUNTI GALBIATI A.A 2016/2017

→ Entrano tre pambi medie:

- MEDIA ARITMETICA ⇒ $m = \langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$
- MEDIA GEOMETRICA ⇒ $m_g = \sqrt{v_1 \cdot v_2} = \sqrt[n]{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n}$
- MEDIA ARMONICA → $m_a = \frac{1}{\frac{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}{2}} \Rightarrow \frac{n}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}\right)}$
- MEDIA PONDERATA / PESATA ⇒ $\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

Se una grandezza x assume i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$ → ne che:

$$x_{medio} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum x_i p_i$$

↳ $\int_A^B x\, p(x)\, dx$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESEMPIO Un ciclista percorre un tratto di strada Tornando all'andata $v = 40 \frac{km}{h}$ e al ritorno $v = 60 \frac{km}{h}$

Sia L la lunghezza del percorso ⇒ $t_{andata} = \frac{L}{40} h$ $t_{ritorno} = \frac{L}{60} h$

→ Tot ⇒ 2L in un tempo $\underbrace{\frac{L}{40} + \frac{L}{60}}_{t_{tot}}$ ⇒ $v_{med} = \frac{2L}{\frac{L}{40} + \frac{L}{60}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}$

media armonica delle velocità!

ESERCIZIO $C_0 = 1€$ → 7% anno ⇒ $C_1 = 1{,}07€$

A) 1° anno 6%, 2° anno 8% → $1° = 1{,}06€$ $2° = (1{,}06) + (8\% \cdot 1{,}06) = 1{,}1448$

B) 1° anno 7% = 2° anno ⇒ $1° = 1{,}07€$ $2° = 1{,}07 + (7\% \cdot 1{,}07) = 1{,}1449$

Il rendimento r ⇒ tasso di rendimento anno

- $C_0 \to C_1 = C_0(1+r) \to C_2 = C_1(1+r) = C_0(1+r)^2$
- $C_0 \to C_1 = C_0(1+r_1) \to C_2 = C_1(1+r_2) = C_0(1+r_1)(1+r_2)$

↳ $C_0(1+r)^2 = C_2$ $(1+r_1)(1+r_2) = (1+r)^2$

media geometrica $(1+r) = \sqrt{(1+r_1)(1+r_2)}$

↓

ottengo $1+r_{medio}$

C_0 = capitale iniziale $\rightarrow$ $C_0(1+i)$ $\rightarrow$ 7% = 7/100 (tasso annuo

Tasso questa operazione dopo $1/n$ di ~~Tasso~~ anno.

$C_0 \Rightarrow$ dopo $\frac{1}{n}$ di anno $\Rightarrow$ $C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)$ $\rightarrow$ capitale all'inizio del 2° periodo

$\Rightarrow C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\Rightarrow$ capitale che ottengo se faccio l'operazione n volte all'anno.

$$\lim_{n\to\infty} C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = C_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}}\right]^i =$$

$$= C_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right]^i = e^i$$

— o —

$$m_a = \frac{v_1+v_2+\dots+v_n}{n} \qquad m_g = \sqrt[n]{v_1\cdot v_2\cdots v_n} \qquad m_{ar} = \frac{n}{\frac{1}{v_1}+\dots+\frac{1}{v_n}}$$

Le medie sono sempre comprese tra il più grande ed il più piccolo valore.

Media pesata $= \frac{v_1p_1+\dots+v_np_n}{p_1+\dots+p_n} = \frac{\sum v_i p_i}{\sum p_i}$

MASTER COPY
Tel. 050 83112126
Cell. 388 98377 15

So che $\rightarrow$ $\boxed{m_{arm} \le m_{geom} \le m_{arit}}$

Voglio dimostrare che $m_{geom} \le m_{arit}$ ← (1)

Considero x_1, x_2 $\rightarrow$ $(x_1-x_2)^2 \ge 0$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \ge 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 \ge 2x_1x_2$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \ge x_1x_2$$

Pongo $x_1^2 = a_1$ e $x_2^2 = a_2$ $\Rightarrow$ $\frac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1\cdot a_2}$ (VOC)

— o —

$x_1, x_2, \dots, x_n$ $\rightarrow$ $m_a = x_1, x_2, \dots x_n / n$ se aumento x_1 di ε e diminuisco x_2 di ε

Ho $x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon, x_3, \dots, x_n$ $\Rightarrow$ la m_a è sempre la stessa

$m_g \Rightarrow \sqrt{x_1,\dots,x_n} \ge \sqrt{(x_1+\varepsilon)\cdot(x_2-\varepsilon)\cdots x_n}$ $\rightarrow$ più piccolo

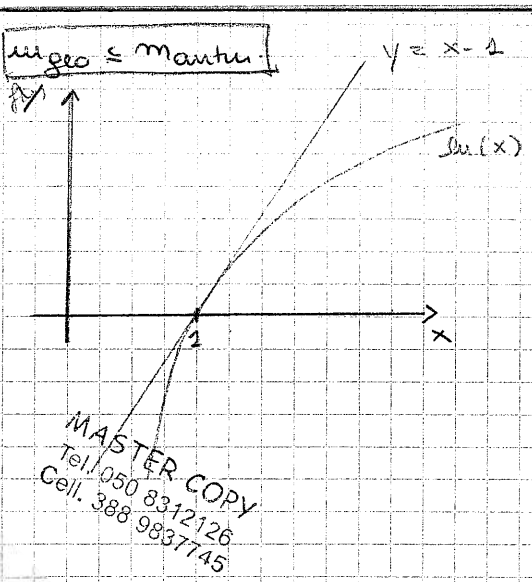
risultato finale della m_g è aumentato ← $\left[x_1x_2 + (x_1+x_1)\varepsilon - \varepsilon\right] x_3 \cdots x_n$

$\rightarrow$ se ε piccolo $\Rightarrow > 0$

Posso a mano a mano aumentare sempre due termini della m_g.

quando sono tutti uguali $\Rightarrow$ $m_g \le m_{arit}$

- Voglio fare un'altra dimostrazione per $\boxed{m_{geo} \leq m_{aritm}}$



Osservo il grafico di $\ln(x)$ ed osservo che in 1 la mia funzione vale 1

↓

La tg in 1 sta tutta sopra $\Rightarrow x - 1 \geq \ln(x)$

Considero n valori $x_1, .., x_n$ di cui faccio la media A

$$A = \frac{x_1 + x_2 + .. + x_n}{n}$$

Calcolo $\frac{x_1}{A} \Rightarrow \frac{x_1}{A} - 1 \geq \ln\left(\frac{x_1}{A}\right)$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n}{A} - 1 \geq \ln\left(\frac{x_1}{A}\right)$$

Sommando i singoli elementi ottengo:

$$\left(\frac{x_1}{A} - 1\right) + \left(\frac{x_2}{A} - 1\right) + .. + \left(\frac{x_n}{A} - 1\right) \geq \ln\left(\frac{x_1}{A}\right) + .. + \ln\left(\frac{x_n}{A}\right)$$

$$\frac{\frac{x_1 + x_2 + .. + x_n}{n} - A}{A/n} \geq \ln\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot .. \cdot x_n}{A^n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \ln\left(\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot .. \cdot x_n}{A^n}\right) \Rightarrow \text{vuol dire che è} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_n}{A^n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .. \cdot x_n} \leq A \quad \Rightarrow m_{geo} \leq m_{aritm}.$$

- Dimostro che la $\boxed{m_{arm} \leq m_{geom}}$ ←

Pongo $y_1 = \frac{1}{x_1}, \; y_2 = \frac{1}{x_2}, \; .., \; y_n = \frac{1}{x_n}$

$$\frac{m_{arm}}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + .. + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .. \cdot x_n} \leq m_{geo}$$

$$\frac{n}{y_1 + y_2 + .. + y_n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot .. \cdot y_n}}$$

fanno l'inverso

$$\frac{y_1 + y_2 + .. + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot .. \cdot y_n}$$

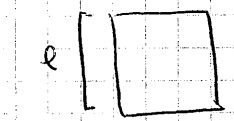
$m_{aritmetico} \geq m_{geo}$

Ho ritrovato che $m_{aritm} \geq m_{geo}$

$\Rightarrow m_{armonico} \leq m_{geometrico}$ ✓ OK

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESERCIZIO Ho una lamina quadrata di lato ℓ e so che $1m^2 = 1kg$



→ peso il quadrato e poi faccio lo $\sqrt{}$ del n° ottenuto

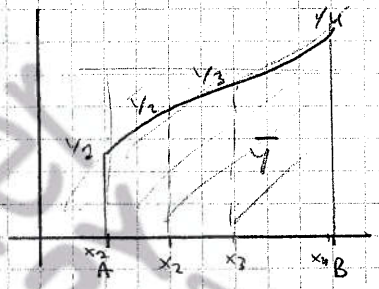
Se ottengo le misure dei pesi $p_1, p_2, \dots p_n$ cosa mi conviene fare:

1) media pesi + $\sqrt{}$ 2) $\sqrt{\text{peso}}$ + media ?

Dati $x_1, \dots, x_n \Rightarrow \overline{x}_{(\text{x media})} = \dfrac{\sum x_i}{n}$

Se considero una $y = f(x)$ (>0) su un intervallo A, B

Divido l'intervallo A,B in n parti uguali $\left(\frac{B-A}{n}\right)$



$\rightarrow y_1 = f(x_1), \dots, y_n (= x_n) = f(B)$

So che $\frac{B-A}{n} \Rightarrow$ Tratto infinitesimo dell'asse x

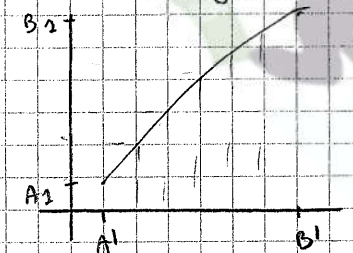
$\rightarrow \dfrac{B-A}{n} = dx \Rightarrow n = \dfrac{B-A}{dx}$

$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{(y_1 + \dots + y_n)\,dx}{B-A} = \frac{\int y\,dx}{B-A} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{B-A}\int_A^B y(x)\,dx}$$

Definizione di valor medio di una funzione.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

GENERALIZZAZIONE meglio del caso continuo:



$y = f(x)$

$dx = \dfrac{B-A}{n}$

$y_2 = f(A), y_2 = f(A)+dx, y_3 = f(A)+2dx$

$\dfrac{B}{B-A}\,dx$

$$\ln\left(\sqrt[n]{y_1 \cdots y_n}\right) = \frac{1}{n}\ln(y_1 \cdots y_n) = \frac{1}{n}\left[\ln y_1 + \dots + \ln y_n\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B-A}\left[\ln y_1 + \dots + \ln y_n\right] \cdot dx$$

$$= \frac{1}{B-A}\left[\ln f(x_1) + \dots + \ln f(x_n)\right] dx$$

$$= \frac{1}{B-A}\int_A^B \ln(f(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} = e^{\frac{1}{B-A}\int_A^B \ln(f(x))dx}$$ → generalizzazione al caso continuo

TEORIA DEGLI ERRORI → la misura fisica di una qualunque grandezza che varia con continuità è soggetta ad errori definiti come scostamento tra: valori misurati e il valore vero.

- La probabilità, ovvero la frazione di volte, in cui in una misura di X si è ottenuto un valore compreso tra x e $x+dx$ è dato da $p(x)$ =>

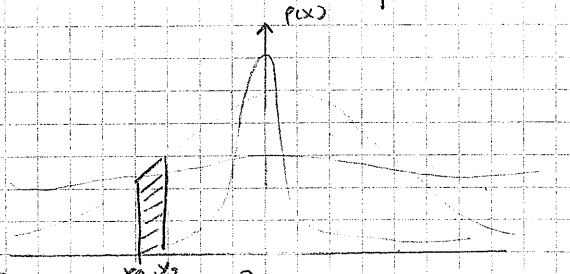
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

La funzione riflette => **GAUSSIANA**

X => valore ricercato lunghezza da misurare

σ = dipende dalla precisione con cui sono state condotte le varie misure.

↳ $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) = 1$



↳ l'area sottesa al grafico rappresenta la % di misure che hanno un errore tra x_1 ed x_2

- La $p(x)$ => **DENSITÀ DI PROBABILITÀ**

Se σ è piccolo → la f è piccata verso l'origine e tanto meno sono disperse le misure intorno al valore vero della grandezza da misurare.

Posso anche scrivere $p(x)$ come: $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-x_{vero})^2}{2\sigma^2}}$

$\varepsilon = x - \bar{x}_{vero}$ => **ERRORE DI UNA MISURA**

Considero la somma di quadrato degli errori: → $(x_1-\bar{x})^2 + .. + (x_n-\bar{x})^2$

Se faccio la media => $\frac{(x_1-\bar{x})^2 + .. + (x_n-\bar{x})^2}{n}$ => **VARIANZA** = σ^2

- σ = **SCARTO QUADRATICO MEDIO** = $\frac{\sqrt{(x_1-\bar{x})^2 + .. + (x_n-\bar{x})^2}}{n}$

ci indica quanto i dati siano più o meno dispersi rispetto al valor medio

ERRORE STANDARD DELLA MEDIA => $\sigma/\sqrt{n}$ → n° minimo fatte.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745