Ricerca operativa 2

Gli appunti contengono un foglio dove sono riportati tutti i modelli visti durante il corso, da tenere in considerazione principalmente per la parte della complessità, alcuni schemi, specialmente sugli esercizi di modellazione, i testi degli esami, esercizi svolti durante lezioni (cioè gli Assestment, tra cui ho riportato la soluzione di quelli più simili agli esami, quindi a mio parere più utili), esami svolti degli anni 2015, 2016, alcuni del 2017 e il primo appello del 2018. Non ho svolto gli esami con esercizi sui grafi! Per quelli del 2017 ho riportato oltre agli svolgimenti forniti dalla professoressa, anche i miei svolgimenti di alcuni esami che potrebbero essere utili in quanto sono commentati. Non garantisco ovviamente la correttezza di tutti gli esami, li ho svolti mentre mi esercitavo per la prova, dove però posso dire di aver preso un ottimo voto. Infine, sono presenti le risposte delle domande di teoria più alcune altre cose teoriche da me aggiunte. Il mio consiglio è di guardare gli schemi per aver una base di modellazione ed iniziare a svolgere gli esami più semplici, per capire al meglio la logica alla base, per esempio dal primo appello di gennaio degli anni 2015-2016-2017, oppure di aprile, poi aumentare via via la difficoltà.

KP-01 ∈ NPH

$$\max \sum_{j=1}^{m} p_j x_j$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \le b$$
$$x \in \{0,1\}^m$$

KP-01 $(\bar{m}, \bar{w}_j, \bar{p}_j, \bar{b})$

ASSEGNAMENTO ∈ P TU matrix

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i \in \{1 \dots m\}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \quad j \in \{1 \dots m\}$$
$$x \in \{0,1\}^{m \cdot m}$$

ASS $(\bar{m}, \bar{m})$

ASSEGN. GENERAL. ∈ NPH ∈ NPC GAP

$(\underset{(i)}{m}, \underset{(j)}{m}, w_{ij}, b_j)$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i \in \{1 \dots m\}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} w_{ij} \le b_j \quad j \in \{1 \dots m\}$$
$$x \in \{0,1\}^{m \cdot m}$$

STABLE SET ∈ NPC

$I \subseteq V: \forall i,j \in I, \{i,j\} \notin E$

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$
$$\text{st} \quad x_i + x_j \le 1 \quad \forall \{i,j\} \in E$$
$$x \in \{0,1\}^{|V|}$$

UNCAPACITATED FACILITY LOCATION ∈ NPH ∈ NPC

$(\bar{m}, \bar{m})$

conf. o diventa diff.

$$\min \sum d_j y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (i = 1 \dots m)$$
$$x_{ij} \le y_j \quad (i = 1 \dots m) \; (j = 1 \dots m)$$
$$x \in \{0,1\}^{m \cdot m} \quad y \in \{0,1\}^m$$

FACILE

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m\, y_j \quad (j = 1 \dots m)$$

CAPACITATED FACILITY LOCAT. ∈ NPC

$(\bar{m}, \bar{m}, \bar{M}_i, \bar{b}_j)$

$$\min \sum_{j=1}^{m} d_j y_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad (i = 1 \dots m)$$
$$\sum_{i=1}^{m} M_i x_{ij} \le b_j y_j \quad (j = 1 \dots m)$$
$$x \in \{0,1\}^{m \cdot m} \quad y \in \{0,1\}^m$$

CLIQUE

$K \subseteq V: \forall i,j \in K, \{i,j\} \in E$

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$
$$\text{st} \quad x_i + x_j \le 1 \quad \forall \{i,j\} \notin E$$
$$x \in \{0,1\}^{|V|}$$

VERTEX COVER

$C \subseteq V: \forall i \in \{i,j\} \in E, i \in C \vee j \in C$

$$\min \sum_{i \in V} x_i$$
$$\text{st} \quad x_i + x_j \ge 1 \quad \forall \{i,j\} \in E$$
$$x \in \{0,1\}^{|V|}$$

$G(V, E)$

j = colori

BIN PACKING P. ∈ NPC

$(\underset{bin}{\bar{m}}, \underset{item}{\bar{m}}, b, M_i)$

$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1 \dots \bar{m}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} M_i \le b y_j \quad j = 1 \dots \bar{m}$$
$$x \in \{0,1\} \quad y \in \{0,1\}$$

PARTITION PROBLEM

$(\bar{m}, \bar{a}_j, c)$

$$\exists x \in \mathbb{B}^m : \sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b \}$$

parti. nodo in 2 insiemi

rimane NPC anche con $b = \sum a$

VERTEX COLOURING ∈ NPC

$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$$
$$\text{st} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i \in V$$
$$x_{ij} + x_{hj} \le y_j \quad \forall \{i,h\} \in E, \; j = 1 \dots m$$
$$y_j, \; x_{ij} \in \{0,1\}$$

SET PARTIONING ∈ NPC

$$\min c^T x$$
$$\text{st} \quad Ax = 1 \leftarrow \text{difficile}$$
$$x \in \{0,1\}^m$$
$$A \in \{0,1\}^{m \cdot m}$$

SET COVER P ∈ NPH ∈ NPC

$$\min c^T x$$
$$\text{st} \quad Ax \ge 1$$

AMMISS. facile

conf. o. difficile

SHORTEST PATH ∈ TU

$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{st} \sum_{ij \in S^+(i)} x_{ij} - \sum_{(ij) \in S^-(i)} x_{ji} = 1 \quad i = s$$
$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = 0 \quad i \in V / \{s,t\}$$
$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = -1 \quad i = t$$
$$x_{ij} > 0$$

MIN COST NETWORK FLOW ∈ TU

$$\min \sum_{(ij) \in A} c_{ij} f_{ij}$$
$$\sum_{(ij) \in A} f_{ij} - \sum_{(ji) \in A} f_{ji} = b_i \quad \forall i \in V$$
$$f_{ij} \le M x_{ij}$$
$$f \in \mathbb{R}_+^{|A|}, \quad x \in \{0,1\}^{|A|}$$

MULTICOMMODITY NETW. ∈ NPH

$$\min \sum_{k=1}^{K} \sum_{(ij) \in A} c_{ij} x_{ij}^k$$
$$\text{st} \sum_{(ij) \in S^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{(ji) \in S^-(i)} x_{ji}^k = b_i^k \quad (i \in V, \; k = 1 \dots K)$$
$$\sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k \le h_{ij} \quad (ij) \in A$$
$$x_{ij}^k > 0 \quad (ij) \in A, \; k \in \{1 \dots K\}$$

MAX FLOW ∈ TU

$$\max x_{ts}$$
$$\text{st} \sum_{(ij) \in S^+(i)} x_{ij} - \sum_{(ji) \in S^-(i)} x_{ji} = 0 \quad i \in V$$
$$0 \le x_{ij} \le h_{ij}$$

MIN CUT

$$\min \sum_{(ij) \in A} h_{ij} w_{ij}$$
$$\text{st} \quad u_i - u_j + w_{ij} \ge 0 \quad (ij) \in A$$
$$u_t - u_s \ge 1$$

| MODELLO |

- descrittivo

Descrive tutte le caratteristiche di un problema: - obiettivo
- vincoli

Indico con n gli oggetti da suddividere o assegnare (es merci)
con m gli insiemi in cui suddividerli (es camion)

sia $j \in \{1..n\}$ l'indice degli oggetti e $i \in \{1..m\}$ l'indice dei camion

→ VINCOLI ASSEGNAMENTO

→ ASSEGNARE OGNI OGGETTO IN UN SOTTINSIEME:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j \in \{1..n\}$$

con $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto } j \text{ sta in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

la sommatoria sugli insiemi

per ogni oggetto → scritto al pc corrisponde a

```
for (j in 1:n){
  Σ_{i=1}^{m} x_ij = 1
  j++ }
```

→ indica che l'oggetto può stare in 1 solo sottinsieme

→ ASSEGNARE GLI OGGETTI AI SOTTINSIEMI TRA GLI m DISPONIBILI (ES 11\genn\2017)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le m \qquad j \in \{1..n\}$$

indica che al massimo gli oggetti li posso mettere in m sottinsiemi

se il problema è di minimo questo vincolo è ridondante perché la f.o. cercherà di usare meno sottinsiemi possibili. però se non lo mettiamo va detto che bisogna controllare se la soluzione fornisce un n° di assegnamenti maggiori degli insiemi possibili

→ SCEGLIERE QUALE OGGETTO ASSEGNARE (ES 18\luglio\2017)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \qquad j \in \{1..n\}$$

vuol dire che se l'oggetto è assegnato (=) allora deve essere assegnato a 1 sottinsieme
ma l'oggetto può non essere assegnato < 1 cioè 0

→ L'OGGETTO PUÒ ESSERE ASSEGNATO A NON PIÙ DI K INSIEMI
es 27\giugno\2017

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le K \qquad j \in \{1..n\}$$

→ L'OGGETTO DEVE ESSERE ASSEGNATO A K SOTTINSIEMI ES 8\SETT\2017

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = K \qquad j \in \{1..n\}$$

→ VINCOLI COPERTURA →

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge 1 \qquad j \in \{1..n\}$$