RICERCA OPERATIVA 2

prof. Laura Galli
laura.galli@unipi.it
http://www.di.unipi.it/~galli
ric: M: 30 GIOVEDÌ
UFF: edificio C - 2° piano - stanza 395 DN

Conoscenze richieste:

- ☐ Prog. Lin.
  - Algoritmo del simplesso
  - Dualità
- ☐ Prog. Lin. su Grafi
  - Cammino minimo
  - Flusso massimo
  - Flusso di costo minimo

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Argomenti da trattare:

- ☐ Cenni sulla complessità computazionale
- ☐ Teoria e metodi di Programmazione Lineare Intera (PLI)
- ☐ Modellazione e risoluzione problemi di ottimizzazione

Materiale didattico:

- APPUNTI CORSO
- SLIDE e DISPENSE SUL SITO
- ~ L.A. Wolsey, Integer Programming Wiley-Interscience 1998
- ~ Pappalardo Passacantando, Ricerca Operativa, Edizioni PISA

Modalità esame:

Solo prova scritta (no libri no appunti) esercizio (con 6 domande) + 1 domanda di teoria

Voto in media con statistica 2



valutazione se l'algoritmo definito va bene per il probl. in questione

OBIETTIVO: Valutare e risolvere problemi di tipo DECISIONALE: scegliere tra un insieme di soluzioni secondo definiti criteri.

Ciò è possibile mediante strumenti teorici e algoritmici che sono necessari per risolvere la PROGRAMMAZIONE INTERA (IP) e gestire sistemi DISCRETI (più complessi) con la ri-formulazione.

Alcune definizioni

- PROGRAMMING = pianificare programmazione / ottimizzare
  - → Si vuole scegliere il MIGLIOR ELEMENTO tra una serie di opzioni possibili secondo dei criteri di scelta
  - → Per l'ottimiz. si possono costruire diversi MODELLI MATEMATICI
    - Lineari / non lineari
    - Discreti / continui (più precisi)
    - convessi / non convessi
    - stocastici / deterministici (IN BASE AI DATI DI INPUT)
  - → Nella prog. lineare intera (PLI) sono coinvolti numeri interi (entità indivisibili)

NOTAZIONE (MILP) = Mixed Integer Linear Programming Problem

$$\max \{ c^T x + h^T y \mid Ax + Gy \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^m_+,\ y \in \mathbb{R}^p_+ \}$$

- $c^T x + h^T y$: CRITERIO DI SCELTA — funzione obiettivo (Fo)
- $Ax + Gy \leq b$: vincoli
- $x \in \mathbb{Z}^m_+,\ y \in \mathbb{R}^p_+$: variabili decisionali

$c \in \mathbb{R}^n,\ h \in \mathbb{R}^p,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ G \in \mathbb{R}^{m \times p},\ b \in \mathbb{R}^m$

→ OSSERVAZIONI
- Mixed → perché ci sono var. continue
- X può assumere i valori (0,1) → SISTEMA BINARIO
- Se Pure IP → G, h, y non ci sono
  Se LP → C, A, X non ci sono

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- SOLUZIONE = assegnamento di valori alle variabili decisionali
- SOL. AMMISSIBILE = assegnamento di valori alle var. dec. che soddisfa tutti i vincoli
- VALORE DELLA f.o. RISPETTO ALLA SOL = calcolare il valore della f.o. per l'assegnamento di valori scelto
- SOL. OTTIMA = soluzione t.c. il suo valore è ≥ rispetto a qualunque sol. amm. (nel caso di un pr. di max; è l'opposto nel caso di un pr. di min.)

- PLI = programmazione lineare intera
più complessa della PL perché non esiste un algoritmo polinomiale per la soluzione generale.

- ALGORITMO POLINOMIALE = alg. che completa l'elaborazione di una dimensione n di dati in ingresso in un tempo di esecuzione pari a $O(n^k)$ dove $k>0$, $k \in \mathbb{N}$)

- RILASSAMENTO CONTINUO = allargare lo spazio delle soluzioni (SI VA NEL CONTINUO)

Nel caso di un probl. di max → si ottiene un UPPER BOUND ovvero un valore che sta al di sopra del valore ottimo del problema;
una qualsiasi sol. amm. è ≤ della sol. ott. e quindi costituisce un LOWER BOUND (sta sotto l'ottimo)

Nel caso di un probl. di min → vale il discorso contrario

Con UB e LB si può definire un intervallo in cui è compreso il valore ottimo

⇓

Se si riesce a definirli con maggiore precisione, procedendo iterativamente, al limite UB=LB = val ottimo ← INTERVALLI SEMPRE PIÙ PICCOLI

. Molto spesso lo spazio delle soluzioni amm. è NON CONVESSO. Comunque si riescono a trovare algoritmi per descrivere tale non convessità e ci sono tecniche per costruire le strutture geometriche della regione possibile (feasible region) con approssimazioni dall'interno e dall'esterno (rilassabilità)

- COP = problemi di ottimizzazione combinatoria

COP = $(N, \mathcal{F})$ — N insieme di variabili, $\mathcal{F}$ insieme di soluzioni

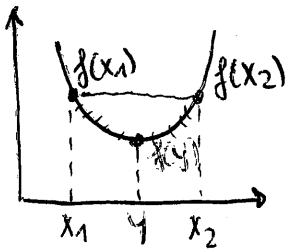
costi: $c_j \ \forall j \in N$ ⇒ costo di $F \in \mathcal{F}$ è $c(F) = \sum_{j \in F} c_j$

massimizzare i costi ⇒ $\max \{ c(F) : F \in \mathcal{F} \}$

Molti problemi COP sono modellati e risolti mediante ILP, ma COP ≠ ILP infatti ILP è un linguaggio matematico → . PIÙ ESPRESSIVO
. MOLTI MODELLI VALIDI PER UNO STESSO COP

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

FUNZIONE CONVESSA



def:
funzione t.c. per qualunque coppia di punti della funzione, il segmento che li congiunge sta **SOPRA** la funz.

$y = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ COMBINAZIONE CONVESSA

$\lambda \in [0,1)$ DESCRIVE QUALUNQUE PUNTO TRA x_1 E x_2

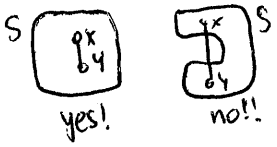
$f(y) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ FUNZIONE CONVESSA

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ SEGMENTO CHE CONGIUNGE I 2 PUNTI DELLA FUNZIONE

def. di funz. conv. nel linguaggio matematico:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$

INSIEME CONVESSO



def.
insieme t.c. per qualunque coppia di punti dell'insieme il segmento che li congiunge è dentro l'insieme

$\forall x,y \in S, \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda) y \in S$

COMBINAZIONE CONVESSA

$x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ SERIE DI VETTORI IN $\mathbb{R}^n$

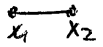
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ SERIE DI MOLTIPLICATORI POSITIVI

t.c. $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ CHE SOMMATI DANNO 1

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^k$ COMB. CONV. ovvero somma pesata dei vettori

CHIUSURA CONVESSA (convex hull) insieme di tutte le possibili combinazioni convesse

oss ↘ la comb. conv è il SEGMENTO che unisce x_1 e x_2



la chius. conv. è la REGIONE che contiene x_1 e x_2 quindi è un RETICOLO o meglio IL CONTORNO DEL POLIGONO, l'insieme dei punti



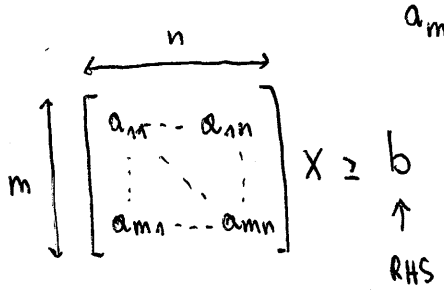
oss ↘ la CONVESSITÀ descrive la regione delle soluzioni però le sol. NON sono convesse perché sono i punti che stanno dentro l'insieme

POLIEDRO

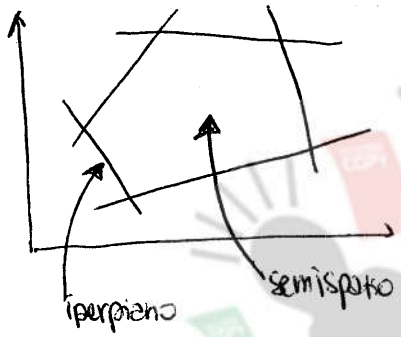
def.
insieme che può essere descritto nella forma
$P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b \}$ in cui $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
(n variabili coinvolte in m vincoli)

notazione estesa di $Ax \geq b$:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$



Il poliedro è l'intersezione di semispazi e rappresenta l'insieme dei punti che soddisfano i vincoli, ovvero la regione ammissibile



in $\mathbb{R}^2$: ciascuna RETTA definisce un vincolo
in $\mathbb{R}^3$: ciascun PIANO definisce un vincolo
in $\mathbb{R}^n$: ciascun IPERPIANO def. un vinc.

in generale
$Ax \geq b$ CIASCUN VINCOLO È DEFINITO DALLE EQUAZIONI (PRESE CON UGUAGLIANZA) PER OGNI RIGA, TALI EQ. DEFINISCONO LE FACCE DEL POLIEDRO

SOL. POSSIBILI DI UN PROBLEMA:

- $z(P) := +\infty$ infeasible (IMPOSSIBILE)
- $z(P) := -\infty$ unbounded (ILLIMITATO)
- $\inf_{(\min)} \{ \frac{1}{x} : x \geq 0 \}$ optimal value but non attainable (VAL. OTT. MA NON ACCESSIBILE)
  ↳ non c'è sol. che dà questo valore
- optimal and feasible value (VAL. OTT. E POSSIBILE)