INTRODUZIONE AL CORSO RO2

master COPY COPISTERIA

- problema decisionale: operare una scelta tra una serie di alternative (decisioni ammissibili) al fine di ottenere le migliori prestazioni del sistema.

→ il nostro problema definisce delle condizioni (vincoli) che ci dicono quali caratteristiche queste decisioni devono rispettare perché siano ammissibili

→ migliori prestazioni del sistema: significa avere un criterio di scelta in modo da scegliere la migliore tra le possibili soluzioni ammissibili, quel criterio che misura la qualità di queste decisioni

→ decisioni: vettori di variabili decisionali, le variabili, in un problema di ottimizzazione matematica, rappresentano le decisioni.

→ funzione obiettivo: ci guida tra le varie soluzioni possibili, rappresenta l'elemento che differenzia la ricerca operativa dall'algebra lineare.

L'ottimizzazione matematica permette di effettuare un'analisi quantitativa (fornisce numeri) ed è uno strumento matematico, quindi formale.

- RO_1: tutte le funzioni sono lineari e le variabili sono continue (reali) ⇒ programmazione lineare (PL)
- RO_2: tutte le funzioni sono lineari e le variabili sono intere ⇒ programmazione lineare intera (PLI)

La PLI ha una maggiore capacità espressiva poiché permette di rappresentare situazioni discrete; il problema rispetto alla PL è che la PLI è molto più difficile.

- Processo decisionale:

→ si parte dal problema (descrizione del nostro sistema: condizioni, vincoli, criterio di scelta, ecc.)

→ da lì costruiamo un modello matematico di ottimizzazione
* variabili continue / intere (se continue ed intere ⇒ modello misto)
* funzioni lineari / non lineari: noi lavoriamo solo con funzioni lineari
* 1 o più obiettivi: per il momento lasciamo da parte l'ottimizzazione multi-obiettivo e lavoriamo con un obiettivo solo.

→ teoria:
* complessità computazionale
* analisi poliedrale:
permette di capire come è fatto il modello e progettare l'algoritmo in grado di risolverlo in modo da prendere delle decisioni opportune.

Per RO1 ed RO2 lo schema è lo stesso. L'obiettivo di RO1 è quello di costruire un modello matematico corretto, ovvero un modello che rappresenti correttamente le decisioni ammissibili. Una volta che il modello è corretto si può applicare l'algoritmo del simplesso per un problema di PL. Si possono costruire modelli matematici equivalenti, ma tipicamente l'algoritmo è sempre quello; il criterio di scelta tra due modelli equivalenti è scegliere il più piccolo in termini di numero di variabili e vincoli. Nella PLI il criterio di scelta del modello si concentra sulla sua geometria. Per la PLI non esiste un algoritmo generale che permette di risolvere qualunque problema di PLI di dimensioni grandi. L'obiettivo di RO2 è quindi costruire un modello corretto e buono. Ci poniamo quindi le seguenti domande:

→ che cos'è un buon modello?
→ come costruire un buon modello?

Modello e algoritmo, nelle PLI, sono strettamente legati. Un buon modello, per ora, è un modello per cui esiste un algoritmo efficiente per risolverlo. Efficiente significa che in tempi ragionevoli ci fornisce una risposta.

- Definizione di programmazione. Programmare significa prendere decisioni.

→ Ottimizzazione o programmazione matematica significa selezionare il migliore elemento (secondo un certo criterio, che è la funzione obiettivo) tra una serie di alternative ammissibili / decisioni possibili in un problema decisionale). Quindi, quando parliamo di programmazione od ottimizzazione matematica, facciamo riferimento a modelli matematici per la prescrizione, detti anche modelli di ottimizzazione. L'elemento essenziale dell'ottimizzazione matematica è l'esistenza di un obiettivo; ciò che distingue la RO dalla algebra lineare è l'utilizzo di una funzione obiettivo. I programmi matematici possono essere classificati in base alle strutture che contraddistinguono il loro interno:

* lineari / non lineari: a seconda delle funzioni lavoriamo unicamente con modelli lineari.
* convessi / non convessi: significa che significa insieme o funzione convessa / non convessa.
* Discreti / continui: variabili, finora abbiamo lavorato con strutture lineari, continue, convesse e definite ammissibili
* Stocastici / deterministici: esistono anche modelli di ottimizzazione stocastici.

Per noi sarà tutto lineare, avremo delle non convessità che derivano dall'esistenza di strutture discrete e tutto sarà deterministico, ovvero non avremo variabili aleatorie in gioco.

- Programmazione lineare intera.

→ Significa prendere decisioni con numeri interi. Più precisamente significa prendere decisioni in cui alcune di queste decisioni possono assumere soltanto valori interi (possono essere lineari, 0-1, oppure numeri interi qualsiasi).

→ perché ci interessa rappresentare le nostre decisioni mediante dei numeri interi? Perché spesso nella realtà abbiamo a che fare con entità indivisibili e come tali devono essere rappresentate da strutture discrete, quindi da numeri interi. Sono quindi una necessità a livello di modellazione.

→ Io non so modellare con gli interi, però posso costruire un modello di PL in cui le variabili sono continue e cerco di approssimarlo al discreto. Nella pratica, per molti problemi di ottimizzazione combinatoria, se usiamo un'approssimazione con la PL, otteniamo delle soluzioni effettivamente distanti dall'ottimo.

È perciò necessario imparare la PLI. Un costo molto diffuso nella pratica è legato a:

- Binario: variabili che possono assumere solo valori 0-1. Questo è utile:
  - → per modellare decisioni sì/no, ad esempio nel problema knapsack in cui oggetto viene un oggetto oppure non lo selezioniamo;
  - → disgiunzioni logiche: o questo o quello;
  - → condizioni logiche di vario tipo
  - → modellare costi fissi
  - → modellare funzioni lineari a tratti

In tutti questi casi, se usiamo un'approssimazione mediante variabili continue, quello che otteniamo è qualcosa di ben poco accurato e quindi ben poco utile.

- Tipico modello di programmazione lineare intera mista → MILP (Mixed-Integer Linear Programming Problem)
  - → mista: o intera oppure mista intera che vuol dire continua

$$\max_x \{ c^T x + h^T y \mid Ax + Gy \le b,\ x \in \mathbb{Z}^n_+,\ y \in \mathbb{R}^p_+ \}$$

- max: problema di massimo
- $c^T x + h^T y$: funzione obiettivo
- $Ax + Gy \le b$: vincoli espressi in notazione matriciale
- $x \in \mathbb{Z}^n_+$, $y \in \mathbb{R}^p_+$: variabili decisionali

→ Istanze: determinato assegnamento di valori ai coefficienti del nostro problema. I coefficienti sono le note:

* i costi $c \in \mathbb{R}^n$ per le variabili x;
* i costi $h \in \mathbb{R}^p$ per le variabili y;
* la matrice dei coefficienti $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ per le variabili x;
* la matrice dei coefficienti $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ per le variabili y;
* il "right-hand side" $b \in \mathbb{R}^m$.

→ Quiz:

* Cosa significa $y \in \mathbb{R}^p_+$? y è una variabile decisionale continua ed è un vettore di dimensione p con componenti non negative.
* Cosa significa $x \in \mathbb{Z}^n_+$? x è una variabile decisionale intera ed è un vettore di

di dimensione n con componenti non negative.

→ Quindi sono le variabili decisionali? x e y in totale quante variabili decisionali si hanno? n + p.

→ La funzione obiettivo è $c^T x + h^T y$

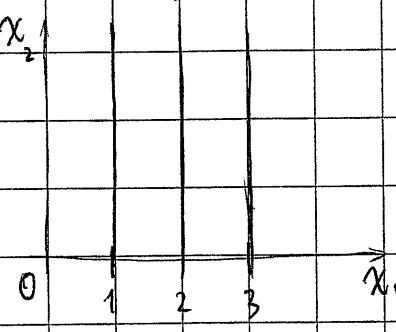
→ I vincoli sono $Ax + Gy \leq b$ e sono m

→ Come può essere la regione ammissibile?

(Es)

$x_1 \in \mathbb{Z}^+$

$x_2 \in \mathbb{R}^+$



- Classi di programmazione intera:

→ programmazione intera pura: si hanno solo le x:

$$\max \{ c^T x \mid Ax \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^n_+ \}$$

→ programmazione mista 0-1: le x, invece che in $\mathbb{Z}^n_+$, sono in $\mathbb{B}^n$:

$$\max \{ c^T x + h^T y \mid Ax + Gy \leq b,\ x \in \mathbb{B}^n,\ y \in \mathbb{R}^r_+ \}$$

→ programmazione lineare: si hanno solo le y, quindi le componenti continue:

$$\max \{ h^T y \mid Gy \leq b,\ y \in \mathbb{R}^p_+ \}$$

→ programmazione mista (M|L|P)

→ programmazione lineare: BIP: (binary integer programming)

- Soluzioni:

→ Una soluzione, in ottimizzazione matematica, a differenza dell'algebra lineare, è un qualunque assegnamento di valori alle variabili decisionali - ciò significa che, in ottimizzazione matematica, non è detto che una soluzione rispetti i vincoli; in algebra lineare, invece, una soluzione deve rispettare le equazioni del sistema. Una soluzione, quindi, in ottimizzazione matematica, è un vettore n-dimensionale, che assegna ai variabili decisionali

→ soluzione ammissibile: è un assegnamento che rispetta tutti i vincoli.

→ valore della funzione obiettivo: significa prendere la soluzione e valutarla rispetto alla funzione obiettivo, quindi sostituire i valori di x e y all'interno della funzione

obiettivo.

→ valore ottimo: assumendo che sia un problema di massimo, è il valore della funzione obiettivo che è maggiore o uguale a qualunque altro valore della funzione obiettivo tra quelli ammissibili.

→ un problema di ottimizzazione matematica potrebbe non avere soluzione ammissibile. Quali sono i diversi modi con cui ciò può accadere? Quali sono i possibili risultati di un MIP?

* impossibile: non c'è un assegnamento delle variabili decisionali che soddisfi i vincoli. Consideriamo un problema di minimo vale $z(\text{P}) = +\infty$. (P = problema)

* unbound: $z(P) = -\infty$

* ∃ valore ottimo finito ∧ ∃ soluzione ottima

* ∃ valore ottimo ∧ ∄ soluzione ottima: caso un po' contro intuitivo

ES ←

(a) $\inf_{x} \left\{ \frac{1}{x} : x \geq 0 \right\}$

(b) $\inf_{x} \left\{ x : x > 0 \right\}$

Il valore ottimo in entrambi i casi è 0, ma non c'è un assegnamento di x che mi dà esattamente quel valore ottimo (si tende a 0). Infatti non possiamo scrivere né min, né possiamo solo scrivere inf (estremo inferiore). Dov'è il problema?

(a) abbiamo a che fare con roba non lineare $\left(\frac{1}{x}\right)$; noi lavoriamo solo con roba lineare.

(b) il maggiore stretto.

Vediamo adesso quali condizioni è necessario porre affinché questo caso impossibile non si verifichi.

- Commenti generali:

→ in molti libri di testo spesso, di default, per descrivere un generico modello di ottimizzazione matematica, si suppone che sia un problema di massimo. Molte persone sono abituate a considerare problemi di minimo (me compreso).

→ si fanno delle assunzioni in modo da evitare casi strani, controintuitivi, come quello precedente per cui esiste un valore ottimo, ma non una soluzione ottima corrispondente. L'assunzione che facciamo nel nostro mondo lineare è che lavoriamo sempre con dei numeri razionali. Questo è senza troppa perdita di generalità perché approssimato ciò che si fa nella pratica è lavorare tramite software di ottimizzazione e un computer può capire unicamente numeri razionali. Questa assunzione è stata già fatta nel corso di RO1, in quanto deve essere posta anche per la PL.