UTILIZZO DELLE VARIABILI DISCRETE

- QUANTITÀ INDIVISIBILI
- DECISIONI SI/NO
- VARIABILI INDICATORE

Servono per imporre/catturare lo stato (valore) di variabili/vincoli

ESEMPIO:

$x \geq 0$ ⟶ variabile continua che indica la quantità di ingrediente x nella miscela

vogliamo distinguere gli stati $\begin{cases} x>0 \\ x=0 \end{cases}$

ovvero se l'ingrediente è presente o meno nella miscela.

Utilizziamo una variabile indicatore binaria $\delta \in \{0,1\}$.

$\delta \in \{0,1\}$ $\begin{cases} x>0 \leftarrow \text{USATA} \\ x=0 \leftarrow \text{NON USATA} \end{cases}$

$\delta \in \{0,1\}$ $\begin{cases} x>0 \text{ (USATA)} \Longrightarrow \delta = 1 \\ x=0 \text{ (NON USATA)} \Longrightarrow \delta = 0 \end{cases}$

$x \geq 0$ ← variabile continua che indica la quantità di ingrediente x nella miscela

$\delta \in \{0,1\}$ ← variabile indicatore binaria che indica lo stato

- $\delta = 0$ ⟶ ingrediente NON usato
- $\delta = 1$ ⟶ ingrediente usato

a) $\boxed{x>0 \Longrightarrow \delta = 1}$ ("poniamo δ a 1 quando $x>0$")

III

$\delta = 0 \Longrightarrow x = 0$

III

$x \leq M \cdot \delta$

$\delta \Longrightarrow x$ $\quad$ $\delta \Longrightarrow x$

VALORE VARIABILE INDICATORE	$\Longrightarrow$	VALORE ALTRA VARIABILE/VINCOLO
		STATO

$\boxed{(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})}$

$(x \Rightarrow \delta) \Longleftrightarrow (\bar{\delta} \Rightarrow \bar{x})$

N.B. M è un UB valido sulle quantità di ingrediente x che può essere inserito nella miscela

UB su x ⟶ (M) — BIG M: massima quantità di ingrediente nella miscela

LB su x ⟶ (m) — SMALL m: minima quantità di ingrediente nella miscela

$M \geq 0 \longrightarrow M = +\infty$ (CASO LIMITE)

$m \geq 0$

$\boxed{x \geq 0}$ — quantità positive

$x - M \cdot \delta \leq 0 \Longleftrightarrow (x \leq M \cdot \delta)$

- $\delta = 0 \longrightarrow x \leq 0 \longrightarrow x = 0$ OK!!
- $\delta = 1 \longrightarrow x \leq M$ OK!!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$

A	B	A⇒B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$A \equiv (\delta = 0)$ $\quad \bar{A} \equiv (\delta = 1)$

$B \equiv (x = 0)$ $\quad \bar{B} \equiv (x > 0)$

V $\delta = 0 \Rightarrow x = 0$

F $\delta = 0 \Rightarrow x > 0$

$\delta = 1 \Rightarrow x = 0$ F

$\delta = 1 \Rightarrow x > 0$ V

b) $\boxed{x = 0 \Rightarrow \delta = 0}$ ("poniamo δ e $\emptyset$ quando $x = 0$")

$\delta = 1 \Rightarrow x > 0$

$x \geq \varepsilon \cdot \delta$

N.B. Potendo utilizzare solo vincoli di $\geq, \leq, =$, per esprimere $\delta = 1 \Rightarrow x > 0$ dobbiamo definire un ε di tolleranza al di sotto del quale considero l'ingrediente non utilizzato

$x \geq m \cdot \delta$

m : LB

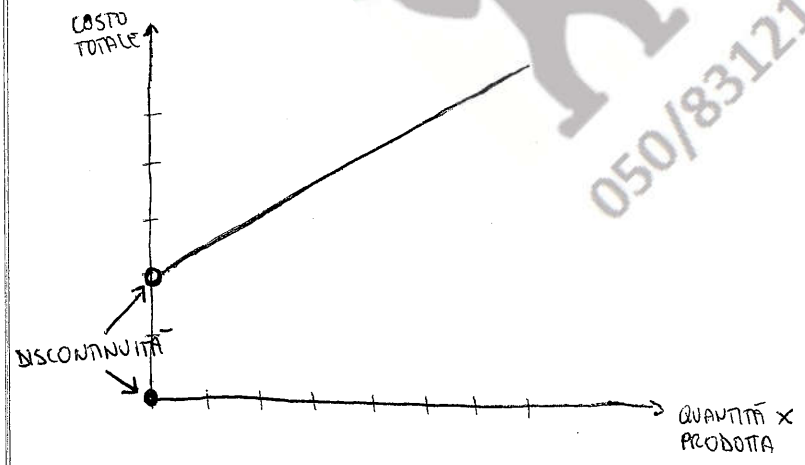
ESEMPIO - COSTO FISSO / FIXED CHARGE PROBLEMS

$x \longrightarrow$ quantità di prodotto da realizzare

C_1 : COSTO VARIABILE ("marginal cost") × UNITÀ

C_2 : COSTO FISSO ("set-up cost")

$\longrightarrow$ COSTO TOTALE = $\boxed{C_1 \cdot x} + (C_2)$ se $x > \emptyset$



la funzione costo è

$$\begin{cases} CT = C_1 \cdot x + C_2 & \text{se } x > 0 \\ CT = 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

funzione costo: $\begin{cases} CT = C_1 \cdot X + C_2 & \text{se } X > 0 \\ CT = \emptyset & \text{se } X = 0 \end{cases}$

Per esprimere questa funzione mediante un vincolo lineare occorre una variabile indicatore $\delta \in \{0,1\}$ t.c.

$\boxed{X > 0 \Longrightarrow \delta = 1} \equiv \delta = 0 \Longrightarrow X = 0$

Il modello risulta quindi: $X \leq M \cdot \delta$ $\begin{cases} \delta = 0 \rightarrow X = 0 \\ \delta = 1 \rightarrow X \leq M \end{cases}$

f. costo $= C_1 X + C_2 \delta$ $\begin{cases} \delta = 0 \rightarrow X = 0 \rightarrow CT = \emptyset \\ \delta = 1 \rightarrow X \leq M \rightarrow CT = C_1 X + C_2 \end{cases}$

$X \geq 0, \ \delta \in \{0,1\}$

Modello:

$X \leq M \cdot \delta$

$CT = C_1 \cdot X + C_2 \cdot \delta$

$X \geq 0, \ \delta \in \{0,1\}$

$M = +\infty$ — UPPER BOUND

Se la funzione costo viene minimizzata (come spesso accade) non è necessario esprimere anche la condizione $X = 0 \Longrightarrow \delta = 0$ poiché la soluzione $X > 0, \delta = 1$, per quanto ammissibile non sarà mai ottima.

Dobbiamo anche mettere la condizione $X = 0 \Longrightarrow \delta = 0$ nel nostro modello o è ridondante? → <u>È RIDONDANTE</u>

$\min CT = C_1 \cdot X + C_2 \cdot \delta$

$X = 0 \Longrightarrow \delta = 0$ — NON È SOLUZIONE OTTIMA

$\delta = 1 \Longrightarrow X > 0$ $\quad X \leq M \cdot \delta$

es: $\begin{cases} X = 3 \\ \delta = 1 \end{cases} \rightarrow 3 \leq (+\infty) \cdot 1 \rightarrow 3 \leq +\infty$ soluzione <u>ammissibile</u> ma <u>non ottima</u>!!

master copy COPISTERIA 050/3312126 388/9837745

ESEMPIO – BLENDING

x_A = proporzione dell'ingrediente A da includere nella miscela $(0 \le x_A \le 1)$

x_B = " " " " B " " " $(0 \le x_B \le 1)$

Vogliamo esprimere la seguente condizione:

"Se A è presente nella miscela, allora anche B deve essere presente nella miscela"

ovvero $\boxed{x_A > 0 \Longrightarrow x_B > 0}$

Usiamo una variabile indicatore $\delta \in \{0,1\}$ per esprimere:

$$\boxed{x_A > 0 \Longrightarrow \delta = 1 \quad , \quad \delta = 1 \Longrightarrow x_B > 0}$$

$\delta = 0 \Longrightarrow x_A = 0$

$x_A \le M \cdot \delta$ (UB) , $x_B \ge \varepsilon \cdot \delta$ (LB)

$x_A \le M \cdot \delta \longrightarrow \boxed{x_A \le \delta}$ con $M = 1$, $0 \le x_A \le 1$ (UB)

$x_B \ge \varepsilon \cdot \delta \longrightarrow \boxed{x_B \ge 0{,}01 \cdot \delta}$ con $\varepsilon = 0{,}01$

$x_A \le \delta$

$x_B \ge 0{,}01 \cdot \delta$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

In maniera simile è possibile utilizzare le variabili indicatore per catturare/imporre il fatto che una disuguaglianza sia soddisfatta o meno

$$\delta = 1 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j \leq b$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_j a_j x_j \leq b + (1-\delta)\cdot M \quad \leftarrow \text{UB valido su } \sum_j a_j x_j - b$$

$$\delta = 1 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j \geq b$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_j a_j x_j \geq b + (1-\delta)\cdot m \quad \leftarrow \text{LB valido su } \sum_j a_j x_j - b$$

Implicazione inverse:

$$\sum_j a_j x_j \leq b \Longrightarrow \delta = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = 0 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j > b$$

$$\Downarrow$$

Riscriviamo $\sum_j a_j x_j > b$ utilizzando ε come valore di tolleranza per la violazione del vincolo stesso

$$\delta = 0 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon$$

$\leftarrow$ Valore di tolleranza usato per stabilire la violazione del vincolo

$$\Downarrow$$

$$\sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon + \delta\,(m - \varepsilon)$$

$$\sum_j a_j x_j \geq b \Longrightarrow \delta = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = 0 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j < b$$

$$\Downarrow$$

$$\delta = 0 \Longrightarrow \sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon + \delta\,(M + \varepsilon)$$

δ $\times$

VARIABILE INDICATORE $\Longrightarrow$ VINCOLO

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745