Programma del Corso di Analisi Matematica 1 per il Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia.

Quella che segue è una versione provvisoria del programma che prevede in linea generale gli argomenti contenuti nel corso ed è quindi coerente con i programmi svolti negli anni precedenti nel corso di Istituzioni. Il riferimento puntuale agli argomenti effettivamente trattati si può trovare nel registro delle lezioni consultabile alla pagina web http://unimap.unipi.it/.

(1) Cenni di teoria degli insiemi: unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano. Notazione dei quantificatori e loro uso nella descrizione di insiemi e nella formulazione di proposizioni. Cenni sui numeri naturali, interi relativi, razionali, reali. Gli insiemi reali rappresentati sulla retta ordinata infinita; somma, prodotto, ordinamento dei numeri reali e proprietà associate. Rappresentazione sulla retta reale degli insiemi numerici e delle operazioni.
Insiemi limitati su R; maggiorante, minorante; massimo, minimo di un insieme A di R; estremo superiore e inferiore di un insieme A di R. Proprietà caratterizzanti.

(2) Numeri complessi: rappresentazione cartesiana e trigonometrica, modulo, argomento, coniugio, radici ennesime di un numero complesso. Polinomi a coefficienti complessi, divisione tra polinomi, radice di un polinomio e sua molteplicità.

(3) Funzioni tra insiemi: dominio, immagine, contro-immagine o immagine inversa di insiemi, iniettività , surgettività, funzione inversa, funzione composta, grafico di una funzione. Caso di funzioni reali a valori reali: monotonia, periodicità, parità/disparità.
Funzioni elementari e loro proprietà: potenza, esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche e loro inverse, loro rappresentazione grafica. Operazioni naturali su grafici di funzioni reali.

(4) Principio di induzione. Nozione di successione e teoremi collegati (limite finito/infinto, teoremi di confronto, algenra dei limiti, limiti notevoli, completezza di R, successioni monotone).
Cenni di topologia, punti di accumulazione per un sottoinsieme A di R. Nozione di limite di f (finito/infinito) per x che tende a x_0 (finito/infinito). Proprietà dei limiti: regole per somma, prodotto e 'composizione', forme di indeterminazione, teoremi di confronto. Limiti notevoli trigonometrici ed esponenziali. Esistenza di limiti destri e sinistri per funzioni monotone.

Nozione di continuità e collegamento con i limiti. Stabilità per somma, prodotto, composizione. Proprietà globali delle funzioni continue: teorema di Weierstrass, teorema di esistenza degli zeri. Teoremi sull'immagine di funzioni continue. Teorema dei valori intermedi.

(5) Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica. Regole di calcolo delle derivate, derivate delle funzioni elementari. Teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange. Applicazioni delle derivate allo studio della monotonia, dei massimi e minimi e della convessità delle funzioni. Studio del grafico di una funzione, asintoti orizzontali, verticali ed obliqui. Teorema di De L'Hopital, formula di Taylor. Applicazioni al calcolo di limiti. Nozione di infinitesimo con simboli di Landau e calcolo degli sviluppi in infitesimi tramite regole di somma, prodotto, 'composizione'.

(6) Integrale secondo Riemann di f. Classi di funzioni integrabili. Integrale come area del sottografico per f positive. Proprietà dell'integrale, teorema della media integrale. Integrale indefinito di f e nozione di primitiva di f. Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale. Suo utilizzo nel calcolo di integrali. Integrazione delle funzioni razionali, integrazione per parti e per sostituzione. Integrali generalizzati.

master COPY

(7) Nozione di serie numerica (reale/complessa), teoremi sulle serie. Serie di potenze e teoremi collegati.

(8) Equazioni differenziali del primo ordine: problema di cauchy, teoremi di esistenza, spazio delle soluzioni per equazioni lineari. Equazioni a variabili separabili e di Bernoulli. Equazioni del secondo ordine: lineari, coefficienti costanti, metodo di variazione delle costanti.

(9) Cenni di calcolo combinatorio: fattoriale, binomio di Newton, combinazioni, disposizioni, permutazioni di insiemi di n elementi.

[redacted]

[redacted]

Bertsch, Dal Passo, Giacomelli: Analisi Matematica, Mc Graw-Hill Editore

Bramanti, Pagani, Salsa: Analisi matematica 1 con elementi di geometria e algebra lineare, Zanichelli Editore
Nota: il libro è scritto molto bene ma manca la parte di equazioni differenziali da integrare con un altro testo.

[redacted]

Salsa, Squellati: Esercizi di Analisi Matematica 1, volume 1, Zanichelli Editore

In tutti i libri sopra manca la parte di equazioni differenziali che può essere trovata ad esempio in Marcellini, Sbordone: Esercizi di Matematica, Volume II, Tomo 2, Liguori Editore

Ogni altro libro contenga gli argomenti trattati nel programma (registro delle lezioni) può essere utilizzato.

master COPY

ANALISI 1 (solo teoria)

master copy

INSIEMI = collezione di oggetti

↳ si definiscono con LETTERE MAIUSCOLE e si descrivono con PARENTESI GRAFFE

es. $A = \{1, 2, 4, 7\}$ CARDINALITÀ = 4 → CARDINALITÀ FINITA
(numero degli elementi che contiene l'insieme)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots 100 \dots\}$ CARDINALITÀ INFINITA (è un insieme numerabile)

<u>Operazioni fra insiemi</u>

UNIONE Dati A e B insiemi, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ (si parla di elementi che appartengono ad ALMENO 1 dei 2 insiemi)

INTERSEZIONE Dati A e B insiemi, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ (si parla di elementi che appartengono ad ENTRAMBI)

SOTTRAZIONE Dati A e B insiemi, $A - B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (sono gli elementi che appartengono ad A, ma non a B)

DIFFERENZA SIMMETRICA DI B Dati A e B insiemi, $A \Delta B = \{x : x \in A, x \in B, x \in A \cap B\}$ (sono gli elementi che appartengono ad A, a B, ma non comuni tra di loro)



$A \Delta B \overset{\text{uguaglianza di insiemi}}{=} (A \cup B) - (A \cap B)$

- $A \not\supseteq B$ (A e B NON possono coincidere)
  - $\exists\, b \in B : b \notin A$
  - $\exists\, a \in A : a \notin B$

  } queste implicazioni possono essere entrambe vere

- $A \subseteq B$ (A è contenuto in B / è sottoinsieme di) $\quad A \supseteq B$ (contiene) $\quad A \subseteq B$ se $x \in A \Rightarrow x \in B$ → TUTTI gli elementi di A stanno anche in B (A è contenuto in B se ciò implica che gli elementi che appartengono ad A sono contenuti in B)
- $\emptyset$ → INSIEME VUOTO (insieme che non ha niente al suo interno)
- se $A \cap B = \emptyset$ gli insiemi si dicono DISGIUNTI

PRODOTTO CARTESIANO FRA A e B $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ (il prodotto cartesiano tra A e B è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi dei due insiemi)

$A \times B \neq B \times A$

- $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ (le parti di A sono tutti i possibili sottoinsiemi B di A)

PARTI DI

$\#\mathcal{P}(A) = 2^n$ (n → elementi di A, # → CARDINALITÀ) considerando $A = \{a_1, a_2, a_3 \dots, a_n\}$

se $n = 0$ $A = \{\emptyset\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\{\emptyset\}\}$ $\#=1$
se $n = 1$ $A = \{a_1\}$ $\mathcal{P}A = \{\{a_1\}, \{\emptyset\}\}$ $\#=2$
se $n = 2$ $A = \{a_1, a_2\}$ $\mathcal{P}A = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{\emptyset\}\}$ $\#=4$

INSIEME DEI NUMERI REALI

$\mathbb{N}_{NAT.} = \{0,1,2,3\ldots\}$ CARDINALITÀ NUMERABILE (gli elementi possono essere contati)
numeri positivi

$\mathbb{Z}_{INT.} = \{0,+1,+2\ldots,-1,-2,-3\ldots\}$ $\quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

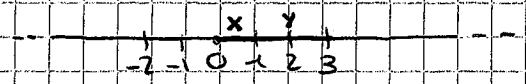
$\mathbb{Q}_{RAZ} = \left\{\frac{p}{q},\ p=x,\ q\in\mathbb{N},\ q\neq 0\right\}$ $\quad \mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ $\quad d=\ell\sqrt{2}$ $\quad \left|\frac{\ell\sqrt{2}}{\ell}\right|$

$\mathbb{R}_{REALI} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ (razionali + irrazionali) → è esattamente il fattore di proporzione fra ℓ e d

$\mathbb{I}$ $\{\pi, \sqrt{2}\}$ ⇒ numeri che non si possono rappresentare nella forma $\frac{p}{q}$

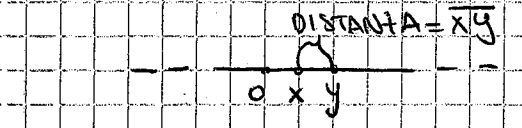
↳ fattore di proporzionalità che corrisponde all'area del cerchio (πr^2)

$\mathbb{R}$ retta infinita

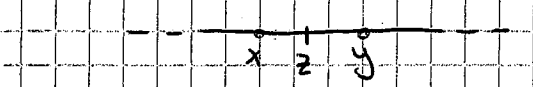


proprietà algebriche di $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R},+)$ somma $(x,y) \xrightarrow{+} x+y$ $\quad x+0=x$ $\quad x+(-x)=0$
- $(\mathbb{R},\cdot)$ prodotto $(x,y) \xrightarrow{\cdot} x\cdot y$ $\quad (x+y)z = xz+yz$
- $(\mathbb{R},\geq)$ ordinamento $(x,y) \to x\leq y$ (y sta a dx di x sulla retta)

↓
ciò stabilisce che in $\mathbb{R}$ è SEMPRE possibile confrontare due numeri



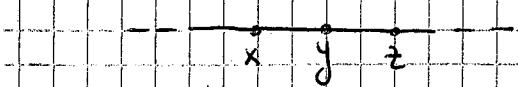
$\begin{cases} y-x \text{ se } x\leq y \\ x-y \text{ se } x\geq y \end{cases}$



tra due numeri reali x e y, esiste sempre un punto fra di essi tale che $z=\frac{x+y}{2}$

verifica: $z-x = y-z$

$\frac{x}{2}+\frac{z}{2} = \frac{y}{2}+\frac{x}{2}$



$x\leq y$ e $y\leq z \to x\leq z$

$x\leq y \to x+z\leq y+z \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x\leq y$ e $0\leq z \Rightarrow xz\leq yz$ se $z\geq 0$
$xz\geq yz$ se $z\leq 0$

vera se
$-xz\leq yz$
$x(-z)\leq y(-z)$
$0\leq z \iff -z\leq 0$
$0-z=-z$
$z-z=0$

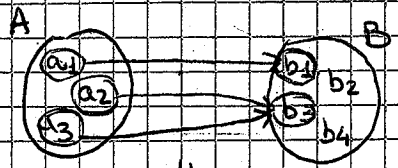
LA DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è una proprietà che caratterizza l'insieme dei numeri razionali come sottoinsieme dei numeri REALI, per la quale scelti 2 valori reali esiste sempre un numero razionale compreso tra essi → dati x e y $\exists z\in\mathbb{Q} : x<z<y$

FUNZIONI

tra insiemi Dati A e B insiemi non vuoti, la funzione è una legge che associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B.

$f: A \to B$

la funzione f parte dall'insieme A e arriva all'insieme B



a_1 è associato a b_1

↳ da un unico elemento di A non possiamo partire 2 frecce

↳ 2 elementi di A possono essere associati entrambi allo stesso elemento di B

proprietà A = DOMINIO di f CONTROIMM.

B = CODOMINIO di f IMM. $\mathrm{Im}(f) = \{b \in B : \exists a \subseteq A \cdot f(a) = b\}$ (immagine)

sempre sottoinsieme di B

$y = f(x)$ y immagine di x

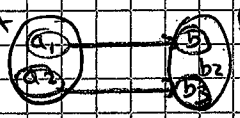
x controimmagine di y

il codominio è l'insieme delle immagini

immagine ⊆ codominio

INIETTIVA se $x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

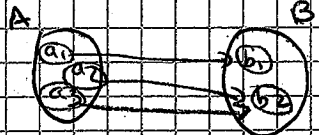
se 2 elementi hanno la stessa immagine, sono gli stessi; non è detto che tutti gli elementi di B siano immagine di A



ogni elemento di B è IMMAGINE di al più un elemento di A

SURIETTIVA se $\forall y \in B \ \exists x \in A \cdot y = f(x)$

$\mathrm{Im}(f) = B$ → il codominio coincide con l'insieme di arrivo



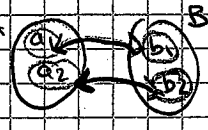
ogni elemento di B è IMMAGINE di almeno un elemento di A

tutti gli elementi di B sono raggiunti almeno da una freccia

INVERTIBILE (INVERSA) $f: A \to B$

$f^{-1}: B \to A$

UNA FUNZIONE È INVERTIBILE SOLO SE È BIETTIVA (sia suriettiva che iniettiva)



se non fosse bijettiva, invertendo la funzione mi ritroverei che da un elemento di B partono 2 frecce.

$f^{-1} \circ f = Id_A$ (identità su A)

$f \circ f^{-1} = Id_B$ (identità su B)

RESTRIZIONE $f: A \to B$

$\forall C$ sottoinsieme di A : $f|_C : C \to B$ la funzione $f|_C(c) = f(c) \ \forall c \in C$

↳ restrizione di C